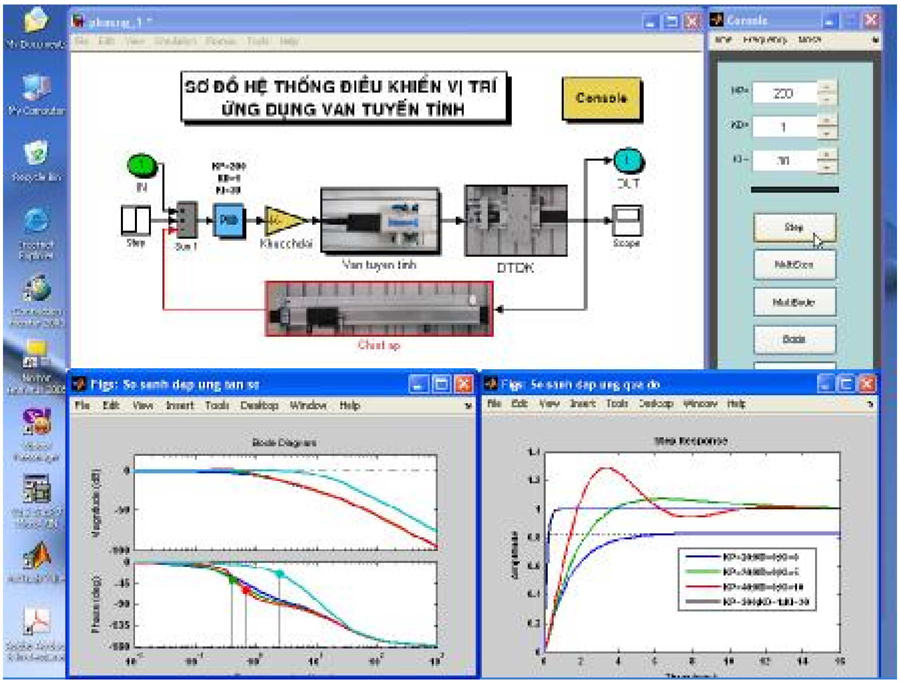
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CƠ KHÍ CHẾ TẠO MÁY

# ÑIEU KHIEN TÖ ÑONG




Bien soan : Nguyen The Hung

TP. HCM , 2006

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT**
**THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**
**KHOA CƠ KHÍ CHẾ TẠO MÁY**

# ÑIEU KHIEN TÖ ÑONG

Bien soan : Nguyen The Hung

TP. HCM , 2006

# LỜI MỞ ĐẦU

Giáo trình này được biên soạn trên cơ sở đề cương môn học Điều Khiển Tự Động dành cho sinh viên các ngành thuộc Khoa Cơ khí Chế tạo máy và sinh viên ngành May công nghiệp của Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TPHCM. Nội dung giáo trình bao gồm các kiến thức cơ bản về lý thuyết điều khiển tự động hệ tuyến tính và được trình bày trong 7 chương:

Chương 1 : Tổng quan về điều khiển tự động
Chương 2 : Mô tả toán học phần tử và hệ thống liên tục
Chương 3 : Đặc tính động học
Chương 4 : Khảo sát tính ổn định của hệ thống
Chương 5 : Đánh giá chất lượng hệ thống điều khiển
Chương 6 : Thiết kế và hiệu chỉnh hệ thống
Chương 7 : Hệ thống điều khiển rời rạc.

Ứng dụng các phần mềm máy tính trong học tập, nghiên cứu là điều hữu ích và là xu hướng phổ biến hiện nay trong đào tạo, đặc biệt là các môn học kỹ thuật với khối lượng kiến thức lớn và thời lượng lên lớp giới hạn. Trong phần phụ lục cuối tài liệu, tác giả giới thiệu bộ công cụ Control System Toolbox của phần mềm MATLAB, bao gồm các hàm chuyên dùng trong mô phỏng và phân tích hệ thống điều khiển. Nội dung phụ lục nhằm hỗ trợ sinh viên tìm hiểu thêm một công cụ mạnh để có thể tự kiểm chứng lý thuyết của môn học và nhanh chóng tiếp cận với các bài toán phức tạp, đòi hỏi khối lượng tính toán lớn trong thực tế.

Do khả năng và kinh nghiệm biên soạn còn hạn chế nên tài liệu chắc chắn không tránh khỏi sai sót. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô, các bạn sinh viên và độc giả để tài liệu ngày càng được hoàn thiện hơn. Các ý kiến đóng góp xin gởi về: Khoa Cơ khí Chế tạo máy, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TPHCM -Số 01 Võ Văn Ngân, Thủ Đức. ĐT: 8.960986.

**Tác giả**

# MỤC LỤC

**Chương 1**

# TỔNG QUAN VỀ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

## 1.1 Các khái niệm cơ bản

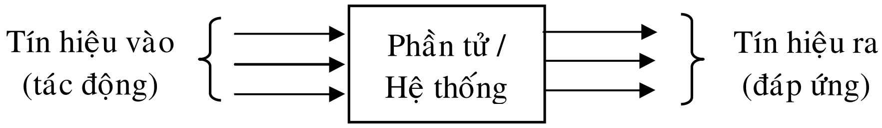
- **Điều khiển** : Điều khiển một hệ thống được hiểu là *quá trình thu thập thông tin, xử lý thông tin và tác động lên hệ thống để biến đổi, hiệu chỉnh sao cho đáp ứng của hệ đạt mục đích định trước*. Quá trình điều khiển không cần sự tham gia trực tiếp của con người gọi là điều khiển tự động.

**Ví dụ 1.1:** Xét quá trình lái (điều khiển) một xe máy để xe luôn chạy với tốc độ ổn định 40 km/h. Để đạt được mục đích này trước hết mắt người lái xe phải quan sát đồng hồ tốc độ để biết tốc độ hiện tại của xe (thu thập thông tin). Tiếp theo, bộ não sẽ so sánh tốc độ hiện tại với tốc độ mong muốn và ra quyết định tăng ga nếu tốc độ <40 km/h và giảm ga nếu tốc độ >40km/h (xử lý thông tin). Cuối cùng tay người lái xe phải vặn tay ga để thực hiện việc tăng hay giảm ga (tác động vào hệ thống). Kết quả là tốc độ xe được hiệu chỉnh lại và giữ ổn định như mong muốn.

Trong các hệ thống điều khiển tự động, quá trình điều khiển cũng diễn ra tương tự nhưng các bộ phận: mắt, bộ não, tay của con người được thay thế bằng các thiết bị kỹ thuật có chức năng tương ứng.

- **Điều khiển học (Cybernetic)**: Ngành khoa học nghiên cứu các quá trình điều khiển và truyền thông trong các hệ thống gọi là điều khiển học. Tuỳ theo đặc điểm của đối tượng nghiên cứu, điều khiển học được chia thành: điều khiển học kỹ thuật, điều khiển học kinh tế, điều khiển học sinh học,...Trong các ngành kể trên, điều khiển học kỹ thuật trùng với tự động học, là ngành phát triển nhất hiện nay. Trong tài liệu này, chúng ta chỉ đề cập đến các vấn đề của điều khiển học kỹ thuật.

- **Tín hiệu** : Thông tin trong hệ thống điều khiển được thể hiện bằng các tín hiệu. Các tín hiệu có thể là dòng điện, điện áp, lực, áp suất, lưu lượng, nhiệt độ, vị trí, vận tốc,... Mỗi phần tử điều khiển nhận tín hiệu vào từ một số phần tử của hệ thống và tạo nên tín hiệu ra đưa vào phần tử khác. Hệ thống cũng giao tiếp với môi trường bên ngoài thông qua các tín hiệu vào, ra của nó. Thay vì tên gọi tín hiệu vào, tín hiệu ra người ta còn sử dụng khái niệm *tác động* và *đáp ứng* với nghĩa là: khi tác động vào hệ thống một tín hiệu vào thì hệ thống sẽ có đáp ứng là tín hiệu ra. Thông thường tín hiệu được biểu diễn toán học bằng hàm số của thời gian. Trong sơ đồ hệ thống, các tín hiệu vào, ra thường được biểu diễn bằng các mũi tên như trên hình 1.1.

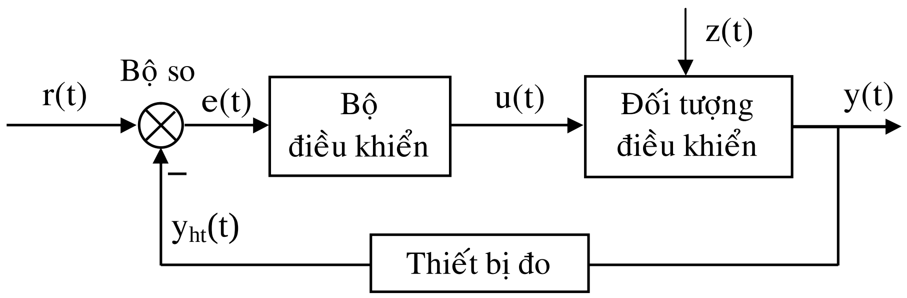



***Hình 1.1*** *Sơ đồ mô tả tín hiệu vào, ra*

Bảng dưới đây trình bày một số đối tượng thường gặp trong kỹ thuật và các tín hiệu vào, tín hiệu ra tương ứng.

| **Đối tượng** | **Tín hiệu vào** | **Tín hiệu ra** |
|---|---|---|
| Động cơ điện | Điện áp | Vận tốc, góc quay |
| Van | Vị trí nòng van | Lưu lượng |
| Xylanh lực | Lưu lượng, áp suất | Vận tốc, vị trí, lực piston |
| Lò nhiệt | Công suất cấp nhiệt | Nhiệt độ |
| Chiết áp | Vị trí con trượt | Điện áp |

## 1.2 Hệ thống điều khiển




***Hình 1.2*** *Cấu trúc cơ bản của hệ thống điều khiển*

Hình 1.2 trình bày cấu trúc cơ bản của một hệ thống điều khiển. Hệ thống gồm ba thành phần cơ bản là đối tượng điều khiển, thiết bị đo và bộ điều khiển.

Trong đó:

r(t) : tín hiệu vào, chuẩn tham chiếu (reference input), giá trị đặt trước.

y(t): tín hiệu ra (output), biến/đại lượng cần điều khiển, giá trị thực.

$y_{ht}(t)$ : tín hiệu hồi tiếp

e(t) : tín hiệu sai lệch, sai số

u(t) : tín hiệu điều khiển

z(t) : tín hiệu nhiễu

§ **Đối tượng điều khiển** : là hệ thống vật lý cần điều khiển để có đáp ứng mong muốn. ĐTĐK bao gồm đa dạng các loại máy, thiết bị kỹ thuật, quá trình công nghệ. ĐTĐK là máy, thiết bị thường được đặc trưng bằng các cơ cấu chấp hành như động cơ, xylanh, hệ bàn trượt với tín hiệu ra là chuyển động vật lý như vận tốc, vị trí, góc quay, gia tốc, lực. Các quá trình công nghệ thường có tín hiệu ra là nhiệt độ, áp suất, lưu lượng, mức.

§ **Thiết bị đo (cảm biến)**: thực hiện chức năng đo và chuyển đổi đại lượng ra của hệ thống thành dạng tín hiệu phù hợp để thuận tiện so sánh, xử lý, hiển thị. Sự chuyển đổi là cần thiết khi các tín hiệu vào, ra không cùng bản chất vật lý: Tín hiệu ra có thể là vận tốc, vị trí, nhiệt độ, lực... trong khi tín hiệu vào đa phần là tín hiệu điện. Nguyên tắc chung để đo các đại lượng không điện bằng phương pháp điện là biến đổi chúng thành tín hiệu điện (điện áp hoặc dòng điện).

Một số thiết bị đo điển hình là:

- Đo vận tốc: bộ phát tốc (DC tachometer, AC tachometer, optical tacho.)
- Đo lượng dịch chuyển: chiết áp (potentiometer), thước mã hoá.
- Đo góc quay: chiết áp xoay, bộ mã hóa góc quay (rotary encoder).
- Đo nhiệt độ: cặp nhiệt ngẫu (thermocouple), điện trở nhiệt (thermistor, RTD).
- Đo lưu lượng, áp suất : các bộ chuyển đổi lưu lượng, áp suất.
- Đo lực: cảm biến lực (loadcell,...)

§ **Bộ so** : so sánh và phát hiện độ sai lệch e giữa tín hiệu vào chuẩn và tín hiệu hồi tiếp (hay giá trị đo được của tín hiệu ra).

Thông thường, các thiết bị đo thực hiện chuyển đổi tỉ lệ nên :

$y_{ht} = Ky$ với K là hệ số chuyển đổi.

Nếu: $K=1$ thì: $e = r - y_{ht} = r - y$

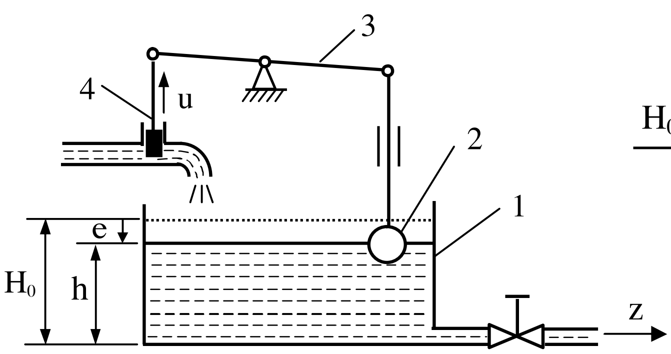
Trong hệ thống thực tế bộ so thường được ghép chung vào bộ điều khiển.

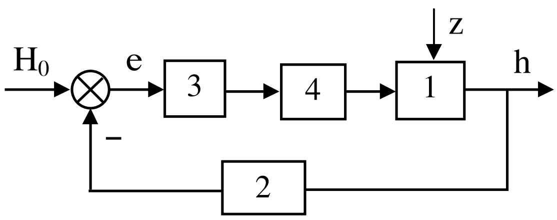
§ **Bộ điều khiển :** dùng thông tin về độ sai lệch e để tạo tín hiệu điều khiển u thích hợp, từ đó tác động lên đối tượng. Thuật toán xác định hàm u(t) gọi là thuật toán điều khiển hay luật điều khiển. Bộ điều khiển liên tục có thể thực hiện bằng cơ cấu cơ khí, thiết bị khí nén, mạch điện RLC, mạch khuếch đại thuật toán. Bộ điều khiển số thực chất là các chương trình phần mềm chạy trên vi xử lý hay máy tính.

§ **Nhiễu :** Các tác động lên hệ thống gây nên các ảnh hưởng không mong muốn được gọi chung là nhiễu. Nhiễu luôn tồn tại và có thể tác động vào bất cứ phần tử nào trong hệ thống, nhưng thường được quan tâm nhiều nhất là các nhiễu tác động lên đối tượng điều khiển, loại này gọi là nhiễu đầu ra hay nhiễu phụ tải.

Trên đây chúng ta chỉ mới đề cập đến các thành phần cơ bản của hệ thống điều khiển. Trong thực tế, cấu trúc hoàn chỉnh của hệ thống điều khiển thường đa dạng và phức tạp hơn. Ví dụ, trong hệ còn có cơ cấu thiết đặt tín hiệu vào chuẩn, các cơ cấu tác động có vai trò trung gian giữa bộ điều khiển và đối tượng như van điều khiển, bộ khuếch đại công suất, mạch cách ly, động cơ, các bộ truyền động. Trong hệ thống điều khiển số còn có các bộ chuyển đổi A/D, D/A, card giao tiếp,...

**Ví dụ 1.2** : Xét hệ thống điều khiển mức nước trên hình 1.3.




***Hình 1.3*** *Hệ thống điều khiển mức nước đơn giản*

Trong hệ thống điều khiển tự động này, đối tượng điều khiển là bồn nước (1). Mục tiêu điều khiển là giữ mức nước trong bồn luôn ổn định và bằng trị số $H_0$ đặt trước cho dù lượng nước tiêu thụ thay đổi như thế nào.

- Tín hiệu ra y = h : mức nước thực tế.
- Tín hiệu vào r = $H_0$ : mức nước yêu cầu.
- Nhiễu z : sự thay đổi lượng nước tiêu thụ .
- Thiết bị đo là phao (2); Bộ điều khiển là hệ thống đòn bẩy (3) có chức năng khuếch đại sai lệch và điều khiển đóng mở van; Cơ cấu tác động là van (4).
- Tín hiệu điều khiển u : độ nâng của van (4).
- Tín hiệu sai lệch : e= r-y = $H_0$ - h

Mức nước yêu cầu có thể thay đổi bằng cách điều chỉnh độ dài đoạn nối từ phao đến đòn bẩy.

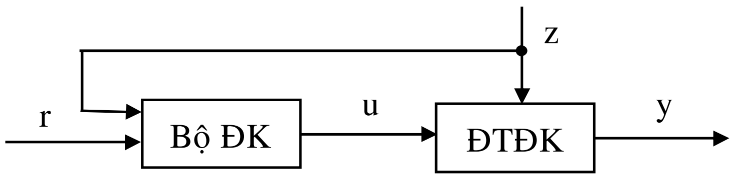
## 1.3 Các nguyên tắc điều khiển

Nguyên tắc điều khiển thể hiện đặc điểm lượng thông tin và phương thức hình thành tác động điều khiển trong hệ thống. Có ba nguyên tắc điều khiển cơ bản: nguyên tắc giữ ổn định, nguyên tắc điều khiển theo chương trình và nguyên tắc điều khiển thích nghi. Khi thiết kế hệ thống ta dựa vào mục tiêu điều khiển, yêu cầu chất lượng và giá thành để chọn nguyên tắc điều khiển phù hợp nhất.

**1.3.1 Nguyên tắc giữ ổn định** : Nguyên tắc này nhằm giữ tín hiệu ra ổn định và bằng giá trị hằng số định trước. Có ba nguyên tắc điều khiển giữ ổn định :

- **Điều khiển bù nhiễu**

Nguyên tắc này được dùng khi các tác động bên ngoài lên ĐTĐK có thể kiểm tra và đo lường được, còn đặc tính của ĐTĐK đã được xác định đầy đủ. Bộ điều khiển sử dụng giá trị đo được của nhiễu để tính toán tín hiệu điều khiển u(t). Nguyên tắc điều khiển này có ý nghĩa phòng ngừa, ngăn chặn trước. Hệ thống có khả năng bù trừ sai số trước khi nhiễu thực sự gây ảnh hưởng đến tín hiệu ra. Tuy nhiên, vì trong thực tế không thể dự đoán và kiểm tra hết mọi loại nhiễu nên với các hệ phức tạp thì điều khiển bù nhiễu không thể cho chất lượng cao.



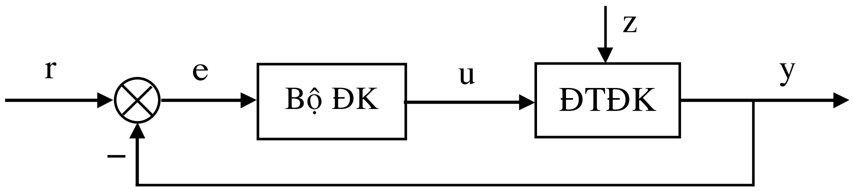

***Hình 1.4*** *Sơ đồ điều khiển bù nhiễu*

- **Điều khiển san bằng sai lệch**

Nguyên tắc này được dùng khi các tác động bên ngoài không kiểm tra và đo lường được, còn đặc tính của ĐTĐK thì chưa được xác định đầy đủ.

Tín hiệu ra y(t) được đo và phản hồi về so sánh với tín hiệu vào r(t). Bộ điều khiển sử dụng độ sai lệch vào-ra để tính toán tín hiệu điều khiển u(t), điều chỉnh lại tín hiệu ra theo hướng làm triệt tiêu sai lệch.

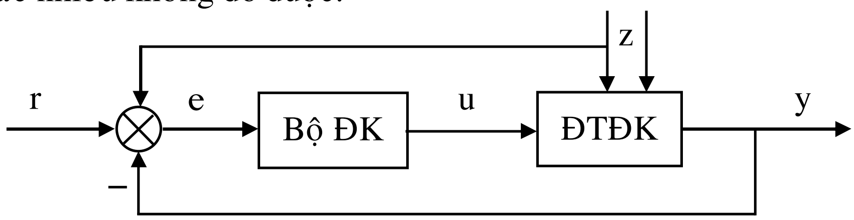
Nguyên tắc điều khiển này có tính linh hoạt, thử nghiệm và sửa sai. Hệ thống có khả năng làm triệt tiêu ảnh hưởng của các nhiễu không biết trước và/hoặc không đo được. Nhược điểm của nó là tác động hiệu chỉnh chỉ hình thành sau khi độ sai lệch đã tồn tại và được phát hiện, tức là sau khi tín hiệu ra đã thực sự bị ảnh hưởng. Các quá trình trễ trong hệ làm cho tín hiệu ra không giữ được ổn định một cách tuyệt đối mà thường có dao động nhỏ quanh giá trị xác lập.




***Hình 1.5*** *Sơ đồ điều khiển san bằng sai lệch*

- **Điều khiển phối hợp**

Để nâng cao chất lượng điều khiển, có thể kết hợp nguyên tắc bù nhiễu và nguyên tắc san bằng sai lệch. Mạch bù nhiễu sẽ tác động nhanh để bù trừ sai số tạo ra bởi các nhiễu đo được, còn mạch điều khiển phản hồi sẽ hiệu chỉnh tiếp các sai số tạo ra bởi các nhiễu không đo được.



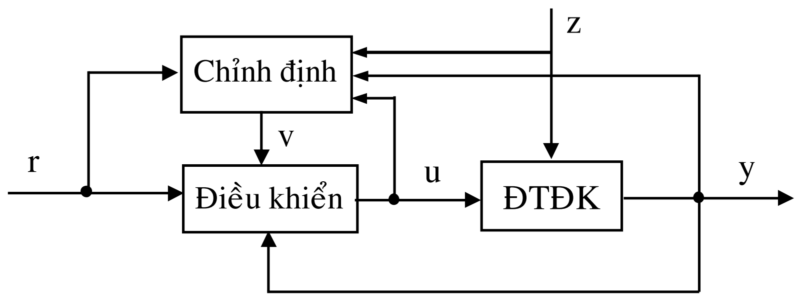

***Hình 1.6*** *Sơ đồ điều khiển phối hợp*

### 1.3.2 Nguyên tắc điều khiển theo chương trình

Nguyên tắc này giữ cho tín hiệu ra thay đổi đúng theo một hàm thời gian (chương trình) định trước.

### 1.3.3 Nguyên tắc điều khiển thích nghi (tự chỉnh định)

Khi cần điều khiển các đối tượng phức tạp, có thông số dễ bị thay đổi do ảnh hưởng của môi trường, hoặc nhiều đối tượng đồng thời mà phải đảm bảo cho một tín hiệu có giá trị cực trị, hay một chỉ tiêu tối ưu nào đó... thì các bộ điều khiển với thông số cố định không thể đáp ứng được, khi đó ta phải dùng nguyên tắc thích nghi. Sơ đồ hệ thống thích nghi như hình 1.7. Tín hiệu v(t) chỉnh định lại thông số của bộ điều khiển sao cho hệ thích ứng với mọi biến động của môi trường.




***Hình 1.7*** *Sơ đồ hệ thống điều khiển thích nghi*

## 1.4 Phân loại hệ thống điều khiển

Có nhiều cách phân loại hệ thống điều khiển. Sau đây là một số cách phân loại thường dùng.

### 1.4.1 Phân loại theo mạch phản hồi

- **Hệ thống kín** : là hệ thống điều khiển có phản hồi, tức là tín hiệu ra được đo và hồi tiếp về so sánh với tín hiệu vào. Bộ điều khiển sử dụng độ sai lệch vào-ra để tính toán tín hiệu điều khiển u(t), hiệu chỉnh lại tín hiệu ra theo hướng làm triệt tiêu sai lệch. Cấu trúc hệ kín có thể có một hoặc nhiều vòng hồi tiếp. Sơ đồ khối của hệ kín một vòng hồi tiếp được mô tả trên các hình (1.2) và (1.5).
- **Hệ thống hở** : không dùng mạch phản hồi, tức là không có sự so sánh kết quả thực tế với trị số mong muốn sau tác động điều khiển. Các h ệ thống điều khiển dựa trên cơ sở thời gian đều là hệ hở. Một ví dụ là máy giặt trong đó các thao tác giặt, xả, vắt được tác động tuần tự bằng rơle thời gian, kết quả đầu ra là độ sạch của quần áo không được máy kiểm tra (đo) lại. Hệ hở có cấu trúc đơn giản và thích hợp với các ứng dụng không đòi hỏi cao về chất lượng đáp ứng.

### 1.4.2 Phân loại theo đặc điểm mô tả toán học

- **Hệ liên tục** : Các tín hiệu truyền trong hệ đều là hàm liên tục theo thời gian. Hệ liên tục được mô tả bằng phương trình vi phân.
- **Hệ rời rạc**: Tín hiệu ở một hay nhiều điểm của hệ là dạng chuỗi xung hay mã số. Hệ rời rạc được mô tả bằng phương trình sai phân.
- **Hệ tuyến tính** : Mọi phần tử của hệ đều có quan hệ vào-ra là hàm tuyến tính. Hệ tuyến tính được mô tả bằng phương trình vi phân (hoặc sai phân) tuyến tính. Đặc trưng cơ bản của hệ tuyến tính là áp dụng được nguyên lý xếp chồng, tức là nếu hệ có nhiều tác động vào đồng thời thì đáp ứng đầu ra có thể xác định bằng cách lấy tổng các đáp ứng do từng tác động riêng rẽ tạo nên.
- **Hệ phi tuyến** : Hệ có ít nhất một phần tử có quan hệ vào-ra là hàm phi tuyến. Hệ phi tuyến không áp dụng được nguyên lý xếp chồng. Hệ tuyến tính chỉ là mô hình lý tưởng. Các hệ thống điều khiển thực tế đều có tính phi tuyến. Ví dụ trong các bộ khuếch đại điện, điện từ, thuỷ lực, khí nén luôn có sự bão hoà tín hiệu ra khi tín hiệu vào đủ lớn; trong truyền động cơ khí, thuỷ lực, khí nén luôn tồn tại các khâu khe hở, vùng không nhạy với tín hiệu vào nhỏ; các hệ thống điều khiển ON/OFF là phi tuyến với mọi giá trị tín hiệu vào.

  Để đơn giản hoá quá trình phân tích và thiết kế, hệ phi tuyến có phạm vi biến thiên của các biến tương đối nhỏ thường được tuyến tính hoá để đưa gần đúng về hệ tuyến tính.
- **Hệ bất biến theo thời gian** (hệ dừng) : Các thông số của hệ không thay đổi trong suốt thời gian hoạt động của hệ thống. Hệ bất biến được mô tả bằng phương trình vi phân/sai phân hệ số hằng. Đáp ứng của hệ này không phụ thuộc vào thời điểm mà tín hiệu vào được đặt vào hệ thống.

- **Hệ biến đổi theo thời gian** (hệ không dừng): Các thông số của hệ là tham số phụ thuộc thời gian, ví dụ hệ thống điều khiển tên lửa với khối lượng của tên lửa giảm dần do sự tiêu thụ nhiên liệu trong quá trình bay. Phương trình mô tả hệ biến đổi theo thời gian là phương trình vi phân/sai phân hệ số hàm. Đáp ứng của hệ này phụ thuộc vào thời điểm mà tín hiệu vào được đặt vào hệ thống.

### 1.4.3 Phân loại theo nguyên tắc điều khiển - mục tiêu điều khiển

- **Hệ thống ổn định hoá**: Khi tín hiệu vào r(t) không thay đổi theo thời gian ta có hệ thống ổn định hoá hay hệ thống điều chỉnh. Mục tiêu điều khiển của hệ này là giữ cho sai số giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra càng nhỏ càng tốt.

  Hệ thống điều khiển ổn định hoá được ứng dụng rộng rãi trong dân dụng và công nghiệp, điển hình là các hệ thống điều chỉnh nhiệt độ, điện áp, tốc độ, áp suất, lưu lượng, mức nước, nồng độ, độ pH, ...

- **Hệ thống điều khiển theo chương trình** : Nếu tín hiệu vào r(t) là một hàm định trước theo thời gian, yêu cầu đáp ứng ra của hệ thống sao chép lại các giá trị tín hiệu vào r(t) thì ta có hệ thống điều khiển theo chương trình. Ứng dụng điển hình của loại này là các hệ thống điều khiển máy CNC, robot công nghiệp.
- **Hệ thống theo dõi**: Nếu tín hiệu vào r(t) là một hàm không biết trước theo thời gian, yêu cầu điều khiển để đáp ứng y(t) luôn bám sát được r(t), ta có hệ thống theo dõi. Điều khiển theo dõi thường được sử dụng trong các hệ thống điều khiển pháo phòng không, rađa, tên lửa, tàu ngầm,...
- **Hệ thống điều khiển thích nghi :** Hệ thống hoạt động theo nguyên tắc điều khiển thích nghi.

### 1.4.4 Phân loại theo dạng năng lượng sử dụng

- Hệ thống điều khiển cơ khí
- Hệ thống điều khiển điện
- Hệ thống điều khiển khí nén
- Hệ thống điều khiển thủy lực
- Hệ thống điều khiển điện-khí nén, điện-thuỷ lực,...

### 1.4.5 Phân loại theo số lượng ngõ vào, ngõ ra

- Hệ SISO (Single Input - Single Output : một ngõ vào - một ngõ ra)
- Hệ MIMO (Multi Input-Multi Output : nhiều ngõ vào - nhiều ngõ ra)

Trong khuôn khổ của chương trình môn học, tài liệu này chỉ tập trung đề cập đến các vấn đề của hệ thống điều khiển tuyến tính bất biến một ngõ vào - một ngõ ra.

## 1.5 Các bài toán cơ bản

Lý thuyết điều khiển tự động nhằm giải quyết hai bài toán cơ bản:

- **Phân tích hệ thống:** Cho hệ thống điều khiển tự động đã biết cấu trúc và thông số của các phần tử. Bài toán đặt ra là khảo sát tính ổn định của hệ thống, tìm đáp ứng và đánh giá chất lượng quá trình điều khiển của hệ.
- **Thiết kế hệ thống:** Biết cấu trúc và thông số của đối tượng điều khiển. Cần thiết kế bộ điều khiển để hệ thống thoả mãn các yêu cầu chất lượng đề ra.

Thiết kế hệ thống điều khiển tự động thực chất là vấn đề các định cấu trúc và thông số của bộ điều khiển (thiết bị điều khiển). Trong quá trình thiết kế thường kèm theo bài toán phân tích. Các bước thiết kế bao gồm:

1) Xuất phát từ mục tiêu điều khiển, yêu cầu về chất lượng điều khiển và đặc điểm của đối tượng được điều khiển, ta xây dựng mô hình toán học của đối tượng.
2) Từ mô hình, mục tiêu điều khiển, yêu cầu chất lượng điều khiển, các nguyên lý điều khiển, khả năng thiết bị điều khiển có thể sử dụng được hoặc chế tạo được, ta chọn một nguyên tắc điều khiển cụ thể. Từ đó lựa chọn các thiết bị cụ thể để thực hiện nguyên tắc điều khiển đã đề ra.
3) Trên cơ sở nguyên lý điều khiển và thiết bị được chọn, kiểm tra về lý thuyết hiệu quả điều khiển trên các mặt: khả năng đáp ứng mục tiêu, chất lượng, giá thành, điều kiện sử dụng, hiệu quả... Từ đó hiệu chỉnh phương án chọn thiết bị, chọn nguyên tắc điều khiển khác hoặc hoàn thiện lại mô hình.
4) Nếu phương án đã chọn đạt yêu cầu, chuyển sang bước chế tạo, lắp ráp thiết bị từng phần. Sau đó tiến hành kiểm tra, thí nghiệm thiết bị từng phần và hiệu chỉnh các sai sót.
5) Chế tạo, lắp ráp thiết bị toàn bộ. Sau đó kiểm tra, thí nghiệm thiết bị toàn bộ. Hiệu chỉnh và hoàn thành toàn bộ hệ thống điều khiển.

## 1.6 Ví dụ ứng dụng

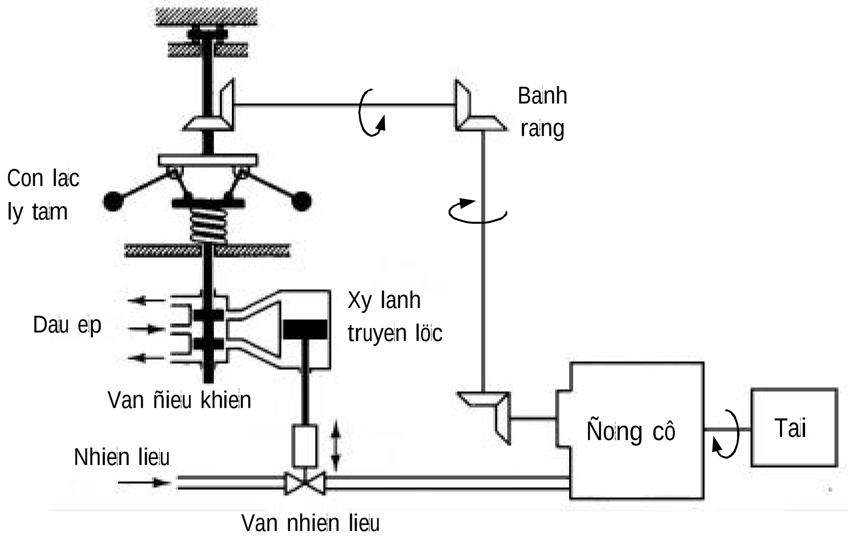
### 1) Bộ điều tốc ly tâm

Hình 1.8 giới thiệu một bộ điều tốc ly tâm để giữ ổn định tốc độ động cơ Diesel hay tuabin hơi. Ở chế độ làm việc bình thường, động cơ quay đều, lực ly tâm của hai con lắc quay cân bằng với áp lực lò xo. Mỗi vị trí ổn định của con lắc tương ứng với một tốc độ đặt trước của động cơ.

Nếu phụ tải thay đổi đột ngột làm cho tốc độ thực của động cơ giảm đi so với tốc độ mong muốn thì lực ly tâm cũng giảm, con lắc hạ thấp, cửa van điều khiển mở, dầu ép từ nguồn cấp chảy qua van vào buồng trên của xylanh, đẩy piston đi xuống làm tăng độ mở của van nhiên liệu, nhiên liệu cấp vào động cơ nhiều hơn nên tốc độ động cơ lại tăng lên đến tốc độ mong muốn.

Trường hợp ngược lại, nếu tốc độ động cơ vượt quá giá trị đặt trước, hệ thống sẽ tự động điều chỉnh để giảm lượng nhiên liệu cung cấp.

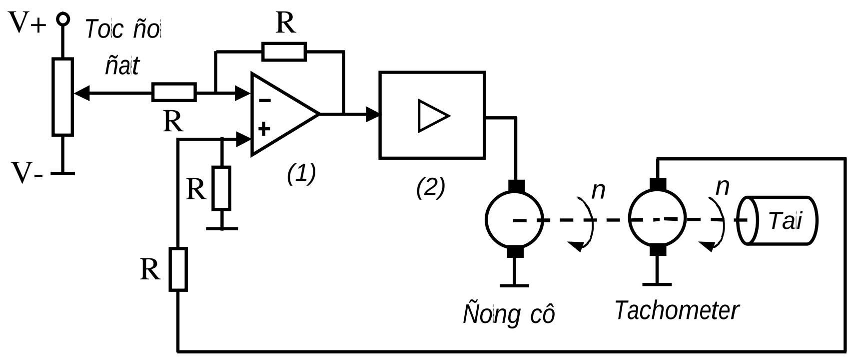
Trong hệ thống này, đối tượng điều khiển là động cơ, đại lượng cần điều khiển là tốc độ động cơ, thiết bị đo là con lắc ly tâm, tín hiệu sai lệch là độ chênh lệch giữa tốc độ mong muốn và tốc độ thực tế, tín hiệu điều khiển là vị trí của van hay lượng nhiên liệu, nhiễu chính là sự thay đổi của tải.




***Hình 1.8*** *Hệ điều khiển tốc độ dùng bộ điều tốc ly tâm*

**2) Hệ điều khiển tốc độ động cơ DC**

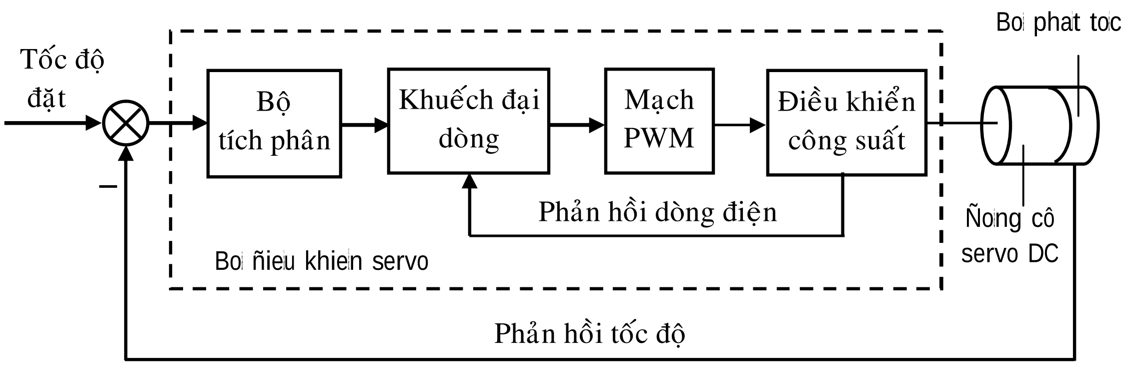
Hình 1.9 giới thiệu một phiên bản đơn giản của hệ thống điều khiển tốc độ động cơ DC. Tốc độ yêu cầu được đặt chỉnh bằng chiết áp và có giá trị trong khoảng 0÷10V. Bộ phát tốc (Tachometer) đo số vòng quay của động cơ và chuyển thành tín hiệu điện áp 0÷10V. Bộ khuếch đại vi sai (1) so sánh giá trị đặt với tốc độ thực tế, sau đó tín hiệu sai lệch được chuyển đến bộ khuếch đại công suất (2) để hình thành tín hiệu điều khiển động cơ. Để có sai số xác lập bằng 0 và cải thiện đặc tính động học của động cơ tốt hơn, người ta thay bộ khuếch đại vi sai bằng bộ điều khiển PID và mạch chỉnh lưu điện tử.




***Hình 1.9*** *Sơ đồ hệ thống điều khiển tốc độ động cơ DC*

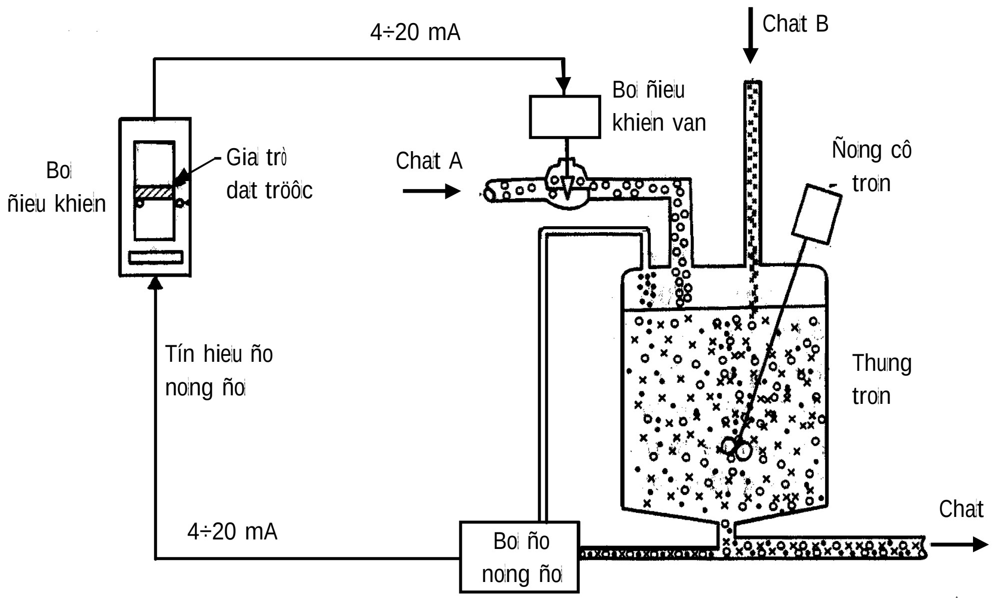
Trong các ứng dụng điều khiển tốc độ và định vị chính xác, hiện nay người ta thường dùng động cơ servo DC và AC. Động cơ servo có quán tính nhỏ, khả năng gia tốc tốt, làm việc tin cậy, hầu như không cần bảo dưỡng. Động cơ servo DC công suất nhỏ được sử dụng trong các thiết bị văn phòng như động cơ quay ổ đĩa máy tính, động cơ quay rulô máy in,...Động cơ servo DC công suất trung bình và lớn được sử dụng trong các hệ thống robot, hệ thống điều khiển máy CNC,...

Hình 1.10 giới thiệu hệ thống điều khiển động cơ servo DC dùng bộ điều khiển điện tử theo nguyên tắc điều biến độ rộng xung (PWM). Tín hiệu phản hồi được lấy từ bộ phát tốc và/hoặc bộ mã hoá góc quay (encoder) lắp đặt sẵn trên động cơ.




***Hình 1.10*** *Sơ đồ hệ thống điều khiển tốc độ động cơ servo DC*

**3) Hệ thống điều khiển máy trộn**

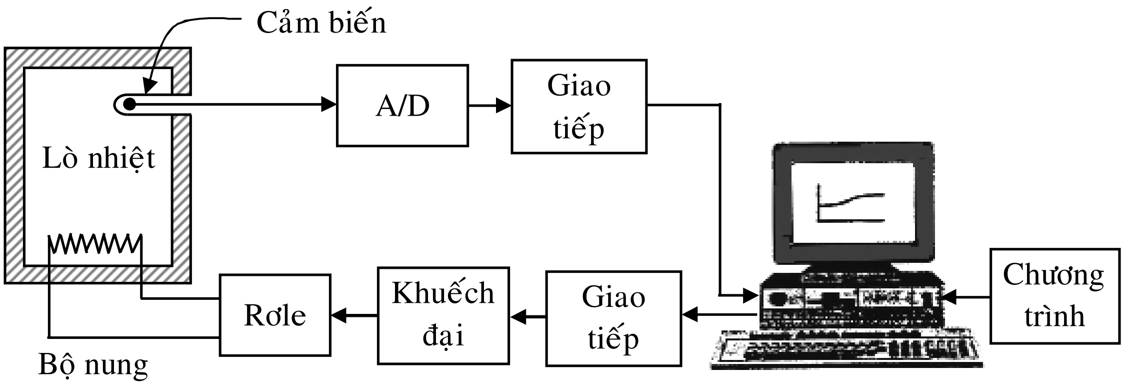



***Hình 1.11*** *Sơ đồ hệ thống điều khiển máy trộn*

Điều khiển một máy trộn (hình 1.11) là duy trì một hỗn hợp của hai chất A và B sao cho nồng độ của chúng không đổi. Hai chất A và B được đưa vào thùng trộn và được máy trộn khuấy đều để cho ra một hỗn hợp C có tỉ lệ % thành phần A đúng theo giá trị đặt trước. Bộ đo nồng độ là một máy phân tích để xác định tỉ lệ phần trăm của thành phần A trong hỗn hợp C và cho ra tín hiệu dòng điện tương ứng từ 4÷20 mA. Tín hiệu này dẫn về bộ điều khiển bằng điện tử tạo nên một tín hiệu điều khiển tác động vào van (thông qua bộ điều khiển van) để khống chế lưu lượng chất A chảy vào thùng trộn.

### 4) Hệ thống điều khiển nhiệt độ

Hình 1.12 giới thiệu sơ đồ một hệ thống điều khiển nhiệt độ lò nung điện. Nhiệt độ trong lò là đại lượng liên tục. Nhiệt độ này được đo bằng cảm biến, sau đó chuyển thành tín hiệu số nhờ bộ chuyển đổi liên tục/số (A/D - Analog/Digital) và đưa vào máy tính thông qua mạch giao tiếp. Nhiệt độ yêu cầu cũng là dạng tín hiệu số và được đặt chỉnh bằng chương trình phần mềm. Máy tính so sánh nhiệt độ hồi tiếp với nhiệt độ đặt và nếu có sai lệch thì máy tính sẽ xuất tín hiệu điều khiển mạch nung thông qua giao tiếp, khuếch đại, rơle cấp điện cho điện trở nung hoặc quạt làm mát trong lò.




***Hình 1.12*** *Sơ đồ hệ thống điều khiển nhiệt độ*

## 1.7 Sơ lược lịch sử phát triển

- Năm 1765, Polzunov chế tạo bộ điều chỉnh mức nước nồi hơi. Năm 1784, James Watt chế tạo bộ điều tốc ly tâm để điều chỉnh tốc độ máy hơi nước. Các sáng chế này được xem là các cơ cấu tự động xuất hiện đầu tiên trong công nghiệp.
- Năm 1868, Maxwell phát triển phương trình vi phân cho bộ điều tốc, tuyến tính hóa tại điểm cân bằng và chứng minh tính ổn định của hệ thống phụ thuộc vào các nghiệm có phần thực âm của phương trình đặc tính. Các tiêu chuẩn ổn định cho hệ tuyến tính được phát triển bởi Routh (1877) và Hurwitz (1895).. Năm 1922, Minorsky là người đặt nền móng cho lý thuyết điều khiển tự động tàu thuỷ. Năm 1917, O.Block đã sử dụng lý thuyết vectơ và hàm biến phức vào việc nghiên cứu lý thuyết điều khiển tự động. Trên cơ sở đó, Nyquist (1932) đã đưa ra phương pháp đồ thị để xác định tính ổn định của hệ thống kín từ đáp ứng tần số của hệ hở với tín hiệu vào hình sin.
- Trong suốt thập niên 1940, phương pháp đáp ứng tần số, đặc biệt là phương pháp biểu đồ Bode, đã được sử dụng rộng rãi để phân tích và thiết kế các hệ thống điều khiển vòng kín tuyến tính. Từ cuối thập niên 1940 đến đầu thập niên 1950, Evans phát triển và hoàn chỉnh phương pháp quỹ đạo nghiệm. Đây là hai phương pháp cốt lõi của lý thuyết điều khiển cổ điển, cho phép thiết kế được những hệ thống điều khiển ổn định và đáp ứng được các yêu cầu điều khiển cơ bản, các bộ điều khiển được thiết kế chủ yếu là bộ PID và bộ điều khiển sớm trễ pha.

Lý thuyết điều khiển cổ điển (trước 1960) chủ yếu áp dụng cho hệ tuyến tính bất biến với một ngõ vào - một ngõ ra .

- Từ khoảng 1960, sự xuất hiện của máy tính số và lý thuyết điều khiển số đã tạo điều kiện cho sự ra đời lý thuyết điều khiển hiện đại dựa trên sự phân tích và tổng hợp đáp ứng thời gian sử dụng biến trạng thái. Lý thuyết điều khiển hiện đại rất thích hợp để thiết kế các bộ điều khiển là các chương trình phần mềm chạy trên vi xử lý và máy tính số. Điều này cho phép thiết kế các hệ thống phức tạp nhiều ngõ vào, nhiều ngõ ra với chất lượng điều khiển cao.
- Trong những thập niên gần đây lý thuyết điều khiển hiện đại phát triển theo các hướng: điều khiển tối ưu các hệ tiền định và ngẫu nhiên, điều khiển thích nghi và điều khiển thông minh. Các phương pháp điều khiển thông minh như điều khiển mờ, mạng thần kinh nhân tạo, thuật toán di truyền bắt chước các hệ thống thông minh sinh học, về nguyên tắc không cần dùng mô hình toán học để thiết kế hệ thống, do đó có khả năng ứng dụng thực tế rất lớn. Xu hướng kết hợp các phương pháp điều khiển trong một hệ thống điều khiển cũng được phát triển với sự trợ giúp của máy tính số.

Ngày nay, lý thuyết điều khiển cổ điển vẫn giữ vai trò quan trọng. Nó cung cấp các kiến thức cơ bản để làm nền tảng cho việc tiếp cận các hệ thống điều khiển hiện đại, ngày càng phức tạp hơn.

**Chương 2**

# MÔ TẢ TOÁN HỌC PHẦN TỬ VÀ HỆ THỐNG LIÊN TỤC

Nội dung chương này nhằm giải quyết hai vấn đề:

- Xác định mô hình toán học cho các phần tử.
- Xác lập mối liên kết giữa các mô hình toán học riêng thành một mô hình toán học chung cho toàn bộ hệ thống.

Hệ thống điều khiển trong thực tế rất đa dạng. Các phần tử của hệ thống có thể là cơ, điện, nhiệt, thuỷ lực, khí nén,... Để nghiên cứu các hệ thống có bản chất vật lý khác nhau chúng ta cần dựa trên một cơ sở chung là toán học.

Khi nghiên cứu hệ thống trước hết chúng ta cần biết hệ thống gồm những thiết bị gì, có những phần tử nào và tìm cách mô tả chúng bằng các mô hình toán học. Mô hình cần phải đảm bảo độ chính xác nhất định, phản ánh được các tính chất đặc trưng của hệ thống thực, nhưng đồng thời phải đơn giản cho việc biểu diễn, phân tích. Trong nhiều trường hợp, để có một mô hình toán tương đối đơn giản, chúng ta phải xem xét bỏ qua một vài thuộc tính vật lý ít quan trọng trong hệ thống và lý tưởng hoá một số hiện tượng vật lý thực tế.

Để mô tả phần tử và hệ thống tuyến tính bất biến liên tục người ta thường dùng các dạng mô hình toán học sau đây :

- Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng.
- Hàm truyền
- Phương trình trạng thái.

Hai dạng mô hình phương trình vi phân và hàm truyền thích hợp với hệ SISO. Mô hình phương trình trạng thái đặc biệt thích hợp với hệ MIMO.

## 2.1 Mô hình phương trình vi phân

Tổng quát, mối quan hệ giữa tín hiệu vào r(t) và tín hiệu ra y(t) của hệ thống tuyến tính bất biến liên tục có thể mô tả bằng phương trình vi phân :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 r(t) \tag{2-1}$$

Trong đó:

$a_i$ , $b_i$ là các hằng số, được xác định từ thông số của các phần tử .

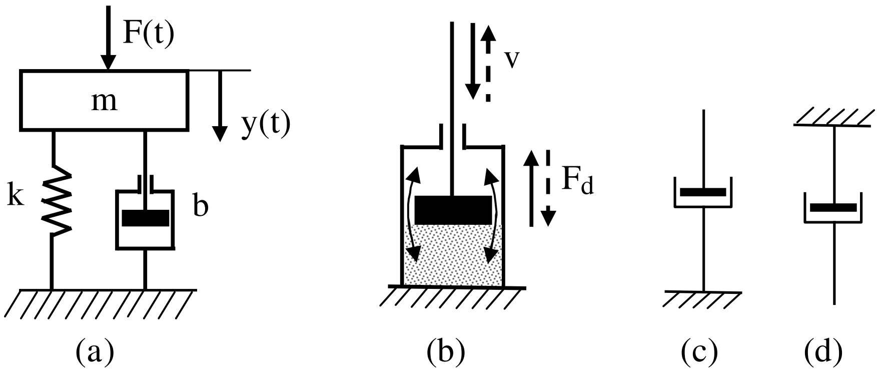
Số mũ n là bậc của hệ thống. Hệ thống có $m \le n$ được gọi là hệ thống hợp thức.

Chỉ có các hệ thống hợp thức mới tồn tại trong thực tế.

Mô hình phương trình vi phân được xây dựng theo phương pháp lý thuyết, tức là được thiết lập dựa trên các định luật vật lý biểu diễn các quá trình động học xảy ra bên trong và các quan hệ giao tiếp với môi trường bên ngoài của hệ thống.

- Các định luật cơ bản chi phối các phần tử cơ khí là định luật II Newton, quan hệ giữa lực và biến dạng, quan hệ giữa ma sát và vận tốc.
- Các định luật cơ bản chi phối các phần tử điện là định luật Kirchhoff, quan hệ dòng điện- điện áp trên điện trở, điện cảm, tụ điện.
- Các định luật cơ bản chi phối các phần tử nhiệt là định luật truyền nhiệt và định luật bảo toàn năng lượng.
- ...

**Ví dụ 2.1.** Xác định phương trình vi phân mô tả hệ cơ khí gồm lò xo - khối lượng - giảm chấn có sơ đồ như hình 2.1a.




***Hình 2.1***

Bộ giảm chấn (hình 2.1b) gồm một xylanh dầu và một piston, một trong hai thành phần này được lắp cố định còn phần kia di động. Khi có chuyển động tương đối giữa piston và xylanh, dầu sẽ chảy từ buồng này sang buồng kia của xylanh qua khe hở giữa piston và xylanh hoặc qua một lỗ nhỏ trong piston. Lực đẩy dầu qua khe hở có tác dụng cản trở chuyển động, ta gọi là lực ma sát nhớt hay lực giảm chấn. Lực giảm chấn $F_d$ ngược chiều và tỉ lệ với vận tốc v:

$F_d = b.v$ với b là hệ số ma sát nhớt, [N.s/m ]

Bộ giảm chấn cũng được biểu diễn đơn giản như hình 2.1c và 2.1d.

Giả sử tại t=0 hệ đang ở trạng thái cân bằng. Theo định luật II Newton, ta có phương trình cân bằng lực:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_i = F(t) - b\frac{dy}{dt} - k.y(t)$$

Trong đó :

- Tín hiệu vào : lực F(t) tác dụng từ bên ngoài, [N]
- Tín hiệu ra : lượng di động y(t) của khối lượng m, [m]

m : khối lượng [kg]

b : hệ số ma sát nhớt (hệ số giảm chấn), [N.s/m]

k : độ cứng lò xo, [N/m]

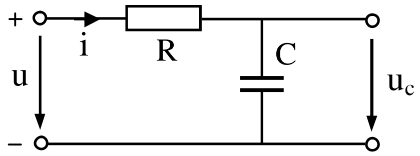
$m\frac{d^2y}{dt^2}$ : lực quán tính ; $b\frac{dy}{dt} = F_d$ : lực giảm chấn

k.y(t) : lực lò xo

$\Rightarrow$ Phương trình vi phân bậc hai mô tả quan hệ vào-ra :

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+k\,y(t)=F(t)$$

**Ví dụ 2.2.** Xác định phương trình vi phân của mạch điện RC nối tiếp.




- Tín hiệu vào : điện áp ngõ vào u , [Volt]
- Tín hiệu ra : điện áp ra $u_c$ giữa hai bản tụ điện, [Volt]

Theo định luật Kirchhoff, ta có:

$$u=u_R+u_c=Ri+u_c$$

mà : $u_c=\dfrac{1}{C}\int idt \quad\Rightarrow\quad i=C\dfrac{du_c}{dt}$

$\Rightarrow$ Phương trình vi phân bậc nhất mô tả quan hệ vào-ra :

$$u=RC\frac{du_c}{dt}+u_c$$

## 2.2 Phép biến đổi Laplace

Để xác định hàm tín hiệu ra của hệ thống khi biết hàm tín hiệu vào, ta cần phải giải phương trình vi phân mô tả hệ thống. Phép biến đổi Laplace giúp ta giải phương trình vi phân một cách đơn giản, thuận lợi hơn so với cách giải thông thường.

### 2.2.1 Định nghĩa

- Cho hàm thời gian f(t) xác định với $t \ge 0$, biến đổi Laplace của f(t) là:

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (2\text{-}2)$$

Trong đó:

L -là ký hiệu phép biến đổi Laplace (toán tử Laplace).

F(s) -gọi là ảnh Laplace hay biến đổi Laplace của hàm f(t).

s -là biến phức, gọi là biến Laplace.

Điều kiện để f(t) có biến đổi Laplace là tích phân ở công thức định nghĩa (2-2) hội tụ.

- Quá trình toán học ngược lại -Tìm hàm gốc f(t) từ hàm ảnh F(s)- được gọi là phép biến đổi Laplace ngược và ký hiệu là $L^{-1}$.

Cho hàm phức F(s), biến đổi Laplace ngược của F(s) là:

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C F(s)e^{ts}ds \qquad (t\ge 0) \qquad (2\text{-}3)$$

với C là đường cong kín được lựa chọn trong miền s; j là số ảo đơn vị.

### 2.2.2 Tính chất

§ ***Tính đơn ánh***

Biến đổi Laplace là phép biến đổi một-một, tức là ứng với mỗi hàm f(t) cho trước chỉ có duy nhất một ảnh F(s) và ngược lại.

§ ***Tính tuyến tính***

Nếu F(s), $F_1(s)$, $F_2(s)$ là ảnh Laplace của f(t), $f_1(t)$, $f_2(t)$ và k là hằng số thì :

$$L\,[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \qquad \text{và} \qquad L[kf(t)] = kF(s)$$

$$L^{-1}[F_1(s) \pm F_2(s)] = f_1(t) \pm f_2(t) \qquad \text{và} \qquad L^{-1}[kF(s)] = kf(t)$$

Tính chất này xuất phát từ tính tuyến tính của phép tích phân trong công thức định nghĩa biến đổi Laplace và Laplace ngược.

§ ***Ảnh của đạo hàm***

Lấy tích phân từng phần $\int udv = uv - \int vdu$ với $u = e^{-st}; v = f(t)$ ta có:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = L[\dot{f}(t)] = \int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

trong đó: f(0) là giá trị của hàm f(t) tại thời điểm t = 0.

Với một hàm f(t) cho trước, giá trị f(0+) và f(0-) có thể khác nhau. Khi đó có sự phân biệt:

$$L^{+}[\dot{f}(t)] = sF(0) - f(0+)$$
$$L^{-}[\dot{f}(t)] = sF(0) - f(0-)$$

Từ kết quả trên ta có thể suy ra ảnh các đạo hàm bậc cao như sau:

$$L[\ddot{f}(t)] = L\{\dot{f}[\dot{f}(t)]\} = sL[\dot{f}(t)] - \dot{f}(0) = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$
$$L[f^{(3)}(t)] = s^3F(s) - s^2f(0) - s\dot{f}(0) - \ddot{f}(0)$$

.........

$$L[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}\, f^{(i-1)}(0) \qquad (2\text{-}4)$$

với $f(0), \dot{f}(0), \ddot{f}(0), ..., f^{(n-1)}(0)$ là giá trị của hàm f(t) và các đạo hàm tại thời điểm t= 0, được gọi là *các điều kiện đầu.*

Nếu xét sự khác nhau giữa $L^{+}$ và $L^{-}$ thì thay vì t=0 ta dùng t=0+ hoặc t=0- .

*Nếu các điều kiện đầu bằng 0,* ta có công thức đơn giản:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n.F(s) \qquad (2\text{-}5)$$

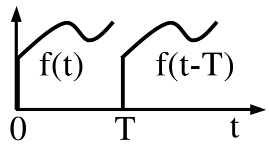
§ ***Ảnh của tích phân***

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad (2\text{-}6)$$

§ ***Ảnh của hàm trễ***

Hàm trễ (hay hàm chuyển dịch) được định nghĩa:

$$f(t-T) = f(t) \text{ khi } t \ge T$$
$$= 0 \text{ khi } t<T$$




Hàm trễ đặc trưng cho một hiện tượng vật lý có đường biểu diễn giống với hàm f(t) nhưng bị dịch chuyển T đơn vị theo thời gian.

Đặt $\tau = t-T$ , ta có :

$$L[f(t-T)] = \int_T^\infty f(t-T)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+T)}d\tau = e^{-Ts}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Do : $$\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Nên : $$L[f(t-T)] = e^{-Ts}F(s) \qquad (2\text{-}7)$$

§ ***Ảnh của tích chập***

Tích chập của hai hàm $f_1(t)$ và $f_2(t)$ được định nghĩa:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau).f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau)d\tau$$

Nếu f(t) là tích chập của $f_1(t)$ và $f_2(t)$ thì :

$$F(s) = L[f(t)] = F_1(s).F_2(s) \qquad (2\text{-}8)$$

§ ***Nhân hàm f(t) với $e^{-a\,t}$***

Nếu f(t) có biến đổi Laplace là F(s) thì :

$$L[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)e^{-st}dt = F(s+\alpha) \qquad (2\text{-}9)$$

Điều này cho thấy việc nhân hàm f(t) với $e^{-\alpha t}$ ($\alpha$ có thể là số thực hoặc số phức) tương đương với việc thay s bằng ($s+\alpha$) trong biến đổi Laplace.

§ ***Định lý giá trị cuối***

Nếu f(t) có ảnh Laplace là F(s) và nếu $\lim_{t\to\infty} f(t)$ hữu hạn thì :

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s.F(s) \qquad (2\text{-}10)$$

Định lý giá trị cuối giúp ta xác định giá trị ổn định (xác lập) của hàm f(t) mà không cần phải biến đổi ngược hàm F(s). Tuy nhiên cần lưu ý là nếu hàm f(t) không tồn tại trạng thái ổn định, ví dụ trường hợp f(t) là hàm $\sin\omega t$ hay $e^{at}\sin\omega t$ với a>0 thì định lý giá trị cuối không áp dụng được.

### 2.2.3 Biến đổi Laplace của các hàm cơ bản

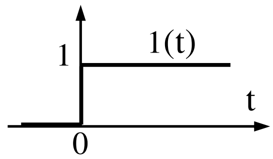
Trong mục này chúng ta tìm biến đổi Laplace của các hàm cơ bản thường dùng trong phân tích hệ thống điều khiển.

Ta giả thiết là chỉ xét các hàm f(t) trong miền $t \geq 0$ và coi f(t)=0 khi t<0. Điều này phù hợp với thực tế vì thông thường chúng ta chỉ nghiên cứu hoạt động của hệ thống điều khiển sau một thời điểm đã được lựa chọn bất kỳ và đặt là t=0. Tín hiệu ra của hệ thống ở mọi thời điểm t>0 hoàn toàn có thể xác định nếu biết các điều kiện ban đầu và hàm tác động (tín hiệu vào) ở thời điểm t=0.

- **Hàm bậc thang đơn vị**

Hàm bậc thang đơn vị được định nghĩa:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } t \geq 0 \\ 0 & \text{khi } t < 0 \end{cases}$$

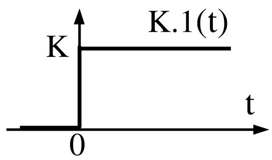



Ảnh Laplace:

$$F(s) = L[1(t)] = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}.e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

Xét trường hợp hàm bậc thang K(t)=K.1(t) ta có:

$$F(s) = L[K.1(t)] = K.L[1(t)] = \frac{K}{s}$$

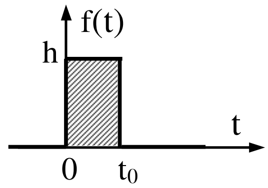



Hàm bậc thang tác động tại t=0 tương ứng với một tín hiệu hằng số đưa đột ngột vào hệ thống tại thời điểm t=0.

- **Hàm xung đơn vị** (xung Dirac)

Xét hàm xung chữ nhật f(t):

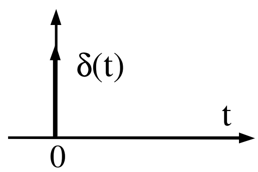
$$f(t) = h\left[1(t) - 1(t - t_0)\right] = \begin{cases} h & \text{khi } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{khi } t < 0 \ \& \ t > t_0 \end{cases}$$




Nếu lấy diện tích $ht_0$ bằng 1 đơn vị, thì $h=1/t_0$. Khi $t_0 \to 0$ thì chiều cao $h \to \infty$ nhưng diện tích vẫn bằng 1. Trường hợp đặc biệt này của hàm xung được gọi là hàm xung đơn vị, hay hàm xung Dirac, ký hiệu là $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \neq 0 \\ \infty & \text{khi } t = 0 \end{cases}$$

Hàm $\delta(t)$ có tính chất: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_0^{0+} \delta(t)dt = 1$




Ảnh Laplace:

$$F(s) = L[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt = \int_0^{0+} \delta(t)e^{-0}dt = \int_0^{0+} \delta(t)dt = 1$$

Hàm xung Dirac có độ rộng bằng 0 và độ lớn vô cùng nên chỉ là hàm toán học thuần tuý, trong thực tế chỉ tồn tại các tín hiệu gần đúng với xung Dirac.

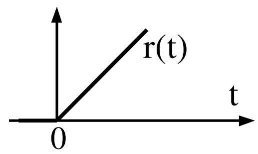
Hàm xung Dirac thường được dùng để mô tả các nhiễu tác động trong khoảng thời gian rất ngắn (tức thời). Ngoài ra, khái niệm xung Dirac cũng rất hữu ích để mô tả quá trình rời rạc hoá một tín hiệu liên tục bất kỳ như chúng ta sẽ đề cập đến sau này.

- **Hàm mũ** $e^{-\alpha t}$ $(\alpha > 0)$

$$F(s) = L[e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t} dt = -\left.\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha}\right|_0^\infty = \frac{1}{s+\alpha}$$

- **Hàm dốc đơn vị**

$$r(t) = t.1(t) = \begin{cases} t & \text{khi } t \geq 0 \\ 0 & \text{khi } t < 0 \end{cases}$$




Lấy tích phân từng phần $\int u dv = uv - \int v du$ với $u = t$ và $v = \frac{e^{-st}}{-s}$ ta có:

$$F(s) = L[t] = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \left.\frac{t e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} dt = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

Cũng có thể dùng tính chất ảnh của tích phân :

$$F(s) = L[t] = L\left[\int_0^t 1(t) dt\right] = \frac{L[1(t)]}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Theo cách tương tự ta có thể tính được ảnh của hàm $t^2, t^3, ..., t^n$.

- **Hàm lượng giác**

Sử dụng công thức Euler : $\cos\omega t \pm j\sin\omega t = e^{\pm j\omega t}$, ta có thể biến đổi :

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad ; \quad \cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

Suy ra:

$$L[\sin\omega t] = \int_0^\infty (\sin\omega t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L[\cos\omega t] = \int_0^\infty (\cos\omega t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} e^{-st} dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$L[e^{-\alpha t}\sin\omega t] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-(s+\alpha-j\omega)t} - e^{-(s+\alpha+j\omega)t}}{2j} dt = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$L[e^{-\alpha t}\cos\omega t] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-(s+\alpha-j\omega)t} + e^{-(s+\alpha+j\omega)t}}{2} dt = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

***<u>Nhận xét:</u>***

Các ảnh $L[e^{-\alpha t}\sin\omega t]$ và $L[e^{-\alpha t}\cos\omega t]$ cũng có thể tính bằng công thức (2-9).

- Bảng tóm tắt các biến đổi Laplace thường dùng:

| STT | f(t) | F(s) |
|---|---|---|
| 1. | $1(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| 2. | $\delta(t)$ | $1$ |
| 3. | $e^{-\alpha t} \quad (\alpha > 0)$ | $\frac{1}{s+\alpha}$ |
| 4. | $1 - e^{-\alpha t}$ | $\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$ |
| 5. | $K\,(1-e^{-\frac{t}{T}})$ | $\frac{K}{s(Ts+1)}$ |
| 6. | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 7. | $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 8. | $t.\, e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^2}$ |
| 9. | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^n}$ |
| 10. | $\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$ | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ |
| 11. | $1-\frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$ | $\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ |
| 12. | $\frac{1}{ab}+\frac{e^{-at}}{a(a-b)}+\frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$ | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ |
| 13. | $\frac{1}{a^2}\left(1-e^{-at}-ate^{-at}\right)$ | $\frac{1}{s(s+a)^2}$ |
| 14. | $\frac{1}{a^2}\left(at-1+e^{-at}\right)$ | $\frac{1}{s^2(s+a)}$ |
| 15. | $\cos\omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 16. | $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 17. | $e^{-\alpha t}\cos\omega t$ | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ |
| 18. | $e^{-\alpha t}\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ |

### 2.2.4 Tìm biến đổi Laplace ngược

Bài toán đặt ra là tìm hàm thời gian y(t) khi biết ảnh Laplace Y(s).

Thông thường, ảnh Laplace Y(s) có dạng hàm hữu tỉ :

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0} \qquad (m<n)$$

Biến đổi ngược $L^{-1}[Y(s)]$ có thể tính bằng công thức định nghĩa nhưng cách này phức tạp. Có một cách tiện dụng hơn, đó là phân tích Y(s) thành tổng các phân thức đơn giản rồi áp dụng các công thức biến đổi cơ bản cho từng thành phần của tổng.

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^{n} L^{-1}[Y_i(s)] = \sum_{i=1}^{n} y_i(t) \qquad (2\text{-}11)$$

Dạng hàm y(t) phụ thuộc vào nghiệm của mẫu số Q(s). Các nghiệm này có thể là nghiệm đơn (nghiệm thực riêng biệt), nghiệm bội, hoặc nghiệm phức. Dưới đây chúng ta sẽ lần lượt khảo sát các trường hợp cụ thể.

**1) Mẫu số của Y(s) chỉ có các nghiệm đơn**

Giả sử Q(s) có n nghiệm đơn là $s_1, s_2, ..., s_n$.

Khi đó có thể phân tích :

$$Q(s) = a_n(s - s_1)(s - s_2)...(s - s_n)$$

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + ... + \frac{A_i}{s - s_i} + ... + \frac{A_n}{s - s_n}$$

trong đó $A_i$ (i = 1,2,...,n) là các hệ số hằng.

Nhân cả hai vế của phương trình với $(s\text{-}s_i)$, ta được:

$$(s - s_i)Y(s) = \frac{A_1(s - s_i)}{s - s_1} + \frac{A_2(s - s_i)}{s - s_2} + ... + A_i + ... + \frac{A_n(s - s_i)}{s - s_n}$$

Nếu lấy giới hạn khi $s \to s_i$ thì tất cả các thành phần có chứa $(s\text{-}s_i)$ ở vế phải đều bằng 0, từ đó ta xác định được:

$$A_i = \lim_{s \to s_i}[(s - s_i)Y(s)] = [(s - s_i)Y(s)]\Big|_{s=s_i} \qquad (2\text{-}12)$$

Tra bảng, ta có : $L^{-1}\left[\dfrac{A_i}{s - s_i}\right] = A_i e^{s_i t}$

Suy ra: $$\boxed{y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{s_i t} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + ... + A_n e^{s_n t}} \qquad (2\text{-}13)$$

**Ví dụ 2.3.** Tìm biến đổi Laplace ngược của $Y(s) = \dfrac{2s + 1}{2s^2 + 6s + 4}$

***Giải.*** Mẫu số của Y(s) có $a_n$=2 và hai nghiệm s=-1 ; s=-2 nên có thể phân tích:

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{2s^2 + 6s + 4} = \frac{2s + 1}{2(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2s + 1}{2(s + 1)(s + 2)} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s + 2}$$

Xác định các hệ số :

$$A_1 = \lim_{s\to -1}[(s+1)Y(s)] = \lim_{s\to -1}\frac{2s+1}{2(s+2)} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -2}[(s+2)Y(s)] = \lim_{s\to -2}\frac{2s+1}{2(s+1)} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad Y(s) = -\frac{1}{2(s+1)} + \frac{3}{2(s+2)}$$

Biến đổi Laplace ngược ta được:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

**2) Mẫu số của Y(s) có nghiệm bội**

Nếu Q(s) có (n-r) nghiệm đơn và một nghiệm bội $s_k$ lặp r lần, ta phân tích :

$$Q(s) = a_n(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_{n-r})(s-s_k)^r$$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + ... + \frac{A_{n-r}}{s-s_{n-r}} + \frac{B_r}{(s-s_k)^r} + \frac{B_{r-1}}{(s-s_k)^{r-1}} + ... + \frac{B_1}{s-s_k}$$

Các hệ số $A_i$ (i =1,2,...,n-r) xác định như trường hợp nghiệm đơn đã biết.

Các hệ số $B_i$ (i= r,...,2,1) được xác định bằng cách nhân cả hai vế của phương trình trên với $(s-s_k)^r$ , sau đó lấy đạo hàm bậc (r-i) của cả hai vế rồi lấy giới hạn khi $s\to s_k$ . Ta có kết quả cuối cùng như sau:

$$B_i = \frac{1}{(r-i)!}\lim_{s\to s_k}\left[\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}\left\{(s-s_k)^r.Y(s)\right\}\right] \qquad (2\text{-}14)$$

***Nhận xét:***

- Nếu $s_k$ là nghiệm kép, cần xác định hai hệ số $B_2$, $B_1$ :

$$B_2 = \lim_{s\to s_k}\left[(s-s_k)^2 Y(s)\right] \quad ; \quad B_1 = \lim_{s\to s_k}\left[\frac{d}{ds}(s-s_k)^2 Y(s)\right]$$

- Nếu $s_k$ là nghiệm bội ba, cần xác định ba hệ số $B_3$ , $B_2$, $B_1$ :

$$B_3 = \lim_{s\to s_k}\left[(s-s_k)^3 Y(s)\right] \quad ; \quad B_2 = \lim_{s\to s_k}\left[\frac{d}{ds}(s-s_k)^3 Y(s)\right] \quad ;$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\lim_{s\to s_k}\left[\frac{d^2}{ds^2}(s-s_k)^3 Y(s)\right]$$

Biến đổi Laplace ngược hàm ảnh Y(s) ta được:

$$\boxed{y(t) = \sum_{i=1}^{n-r}A_i e^{s_i t} + B_r\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{s_k t} + ... + B_2 t e^{s_k t} + B_1 e^{s_k t}} \qquad (2\text{-}15)$$

**Ví dụ 2.4.** Cho ảnh Laplace $Y(s) = \dfrac{2}{s(s+3)(s+1)^2}$ . Hãy xác định hàm y(t).

***Giải.*** Mẫu số của Y(s) có hai nghiệm đơn $s_1$=0 ; $s_2$=-3 và một nghiệm kép $s_k$= -1

Do đó có thể phân tích :

$$Y(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{(s+3)}+\frac{B_2}{(s+1)^2}+\frac{B_1}{(s+1)}$$

Xác định các hệ số :

$$A_1=\lim_{s\to 0}[sY(s)]=\lim_{s\to 0}\frac{2}{(s+3)(s+1)^2}=\frac{2}{3}$$

$$A_2=\lim_{s\to -3}[(s+4)Y(s)]=\lim_{s\to -3}\frac{2}{s(s+1)^2}=-\frac{1}{6}$$

$$B_2=\lim_{s\to -1}[(s+1)^2Y(s)]=\lim_{s\to -1}\frac{2}{s(s+3)}=-1$$

$$B_1=\lim_{s\to -1}\left[\frac{d}{ds}(s+1)^2Y(s)\right]=\lim_{s\to -1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s(s+3)}\right)\right]=\lim_{s\to -1}\frac{-2(2s+3)}{s^2(s+3)^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad Y(s)=\frac{2}{3s}-\frac{1}{6(s+3)}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{2(s+1)}$$

Biến đổi Laplace ngược ta được:

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}e^{-3t}-te^{-t}-\frac{1}{2}e^{-t}$$

**3) Mẫu số của Y(s) có nghiệm phức**

Nghiệm phức luôn có từng cặp liên hợp, ta ký hiệu là $p_{1,2}=a\pm j\omega$.

Giữa chúng có mối quan hệ : $(s-p_1)(s-p_2)=(s-a-j\omega)(s-a+j\omega)=(s-a)^2+\omega^2$ .

Trường hợp nghiệm phức cũng có thể phân tích tương tự như trường hợp nghiệm đơn nhưng để thuận tiện hơn, ta thường dùng cách nêu dưới đây.

Nếu Q(s) có (n-2) nghiệm đơn và 2 nghiệm phức $p_{1,2}$ thì có thể phân tích :

$$Q(s)=a_n(s-s_1)...(s-s_{n-2})(s-p_1)(s-p_2)$$

$$=a_n(s-s_1)...(s-s_{n-2})[(s-a)^2+\omega^2]$$

$$Y(s)=\frac{A_1}{(s-s_1)}+...+\frac{A_{n-2}}{(s-s_{n-2})}+\frac{C_1(s-a)+C_2\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

Các hệ số $A_i$, $C_1$ và $C_2$ có thể xác định bằng phương pháp đồng nhất hệ số đa thức, hoặc áp dụng công thức sau :

$$A_i=\lim_{s\to s_i}[(s-s_i)Y(s)] \qquad (i=1,2,...,n\text{-}2)$$

$$C_1=\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\left\{\left[(s-p_1)(s-p_2)Y(s)\right]\Big|_{s=p_1}\right\}$$

$$C_2=\frac{1}{\omega}\mathrm{Re}\left\{\left[(s-p_1)(s-p_2)Y(s)\right]\Big|_{s=p_1}\right\} \qquad (2\text{-}16)$$

trong đó : Im_Phần ảo ; Re_Phần thực

Biến đổi Laplace ngược hàm ảnh Y(s) ta được:

$$\boxed{y(t)=\sum_{i=1}^{n-2}A_ie^{s_it}+C_1e^{at}\cos\omega t+C_2e^{at}\sin\omega t} \qquad (2\text{-}17)$$

Biểu thức này thể hiện hàm sin tắt dần theo hàm mũ khi phần thực a<0, tăng dần khi a>0 và dao động không đổi khi a= 0 .

Để đưa về dạng hàm sin ta có thể áp dụng công thức :

$$\alpha \sin \omega t \pm \beta \cos \omega t = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\omega t \pm \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\omega t\right) \qquad (2\text{-}18)$$

Nếu đặt $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \cos\varphi$ thì $\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \sin\varphi$

$$\Rightarrow \qquad \alpha \sin \omega t \pm \beta \cos \omega t = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\sin\omega t\cos\varphi \pm \sin\varphi\cos\omega t\right)$$

$$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(\omega t \pm \varphi)$$

**Ví dụ 2.5.** Xác định hàm y(t) khi biết ảnh Laplace $Y(s) = \dfrac{5(s+1)}{s(s^2+2s+5)}$

***Giải.*** Mẫu số của Y(s) có một nghiệm đơn s = 0 và hai nghiệm phức $p_{1,2} = -1 \pm 2j$

Do đó có thể phân tích :

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{C_1(s+1)+2C_2}{s^2+2s+5}$$

$$A = \lim_{s\to 0}[sY(s)] = \lim_{s\to 0}\left(\frac{5(s+1)}{s^2+2s+5}\right) = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\left\{[(s-p_1)(s-p_2)Y(s)]\Big|_{s=p_1}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\frac{5(s+1)}{s}\Big|_{s=-1+2j}\right\} = -1$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega}\mathrm{Re}\left\{[(s-p_1)(s-p_2)Y(s)]\Big|_{s=p_1}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{5(s+1)}{s}\Big|_{s=-1+2j}\right\} = 2$$

Cũng có thể dùng phương pháp đồng nhất hệ số đa thức :

$$Y(s) = \frac{5(s+1)}{s(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{C_1(s+1)+2C_2}{s^2+2s+5} = \frac{(A+C_1)s^2+(2A+C_1+2C_2)s+5A}{s(s^2+2s+5)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 5A = 5 \\ A + C_1 = 0 \\ 2A + C_1 + 2C_2 = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-(s+1)+2(2)}{s^2+2s+5} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+(2)^2} + \frac{2(2)}{(s+1)^2+(2)^2}$$

Biến đổi Laplace ngược ta thu được :

$$y(t) = 1 - e^{-t}\cos 2t + 2e^{-t}\sin 2t$$

$$= 1 + e^{-t}.\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2t - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2t\right)$$

$$= 1 + \sqrt{5}\,e^{-t}\sin(2t-\varphi)$$

trong đó: $\varphi = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} = 26,57°$

***Chú ý***: Nếu phân tích như trường hợp nghiệm đơn và dùng công thức Euler để chuyển hàm mũ phức về dạng sin, cos ta cũng nhận được kết quả trên.

$$Y(s)=\frac{5(s+1)}{s(s^2+2s+5)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+1-2j}+\frac{A_2}{s+1+2j}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0}[s.Y(s)]=1\ ;$$

$$A_2=\lim_{s\to -1+2j}[(s+1-2j)Y(s)]=-\frac{1}{2}-j\ ;\qquad A_3=\lim_{s\to -1-2j}[(s+1+2j)Y(s)]=-\frac{1}{2}+j$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=1-\left(\frac{1}{2}+j\right)e^{-(1-2j)t}-\left(\frac{1}{2}-j\right)e^{-(1+2j)t}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}+j\right)e^{-t}\left(\cos 2t+j\sin 2t\right)-\left(\frac{1}{2}-j\right)e^{-t}\left(\cos 2t-j\sin 2t\right)$$

$$=1-e^{-t}\cos 2t+2e^{-t}\sin 2t$$

**4) <u>Trường hợp tổng quát</u>**

Xét ảnh Laplace:

$$Y(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}\qquad (m\le n)$$

Giả sử Q(s) có $l$ nghiệm đơn, rj nghiệm bội $s_k$ lặp r lần và q cặp nghiệm phức. Ta có thể phân tích Y(s) thành tổng các thành phần tối giản:

$$Y(s)=K+\sum_{i=1}^{l}\frac{A_i}{s-s_i}+\sum_{j=1}^{rj}\sum_{i=1}^{r}\frac{B_i}{(s-s_{kj})^i}+\sum_{i=1}^{q}\frac{C_i(s-a_i)+D_i\omega_i}{(s-a_i)^2+\omega_i^2}\qquad (2\text{-}19)$$

trong đó:

- Hằng số K là kết quả phép chia P(s) cho Q(s) khi m=n. Nếu m<n thì K=0.
- Các hằng số $A_i$, $B_i$, $C_i$, $D_i$ có thể xác định theo các công thức (2-12), (2-14), (2-16) đã nêu hoặc dùng phương pháp đồng nhất hệ số đa thức.

Áp dụng các biến đổi cơ bản cho từng thành phần của tổng, ta được:

1) $L^{-1}[K]=K\delta(t)$

2) $L^{-1}\left[\dfrac{A_i}{s-s_i}\right]=A_i e^{s_i t}.1(t)$

3) $L^{-1}\left[\dfrac{B_i}{(s-s_{kj})^i}\right]=B_i\dfrac{t^{i-1}}{(i-1)!}e^{s_{kj}t}$

4) $L^{-1}\left[\dfrac{C_i(s-a)}{(s-a_i)^2+\omega^2}\right]=C_i e^{a_i t}\cos(\omega_i t)$

5) $L^{-1}\left[\dfrac{D_i\omega_i}{(s-a_i)^2+\omega_i^2}\right]=D_i e^{a_i t}\sin(\omega_i t)$

Hàm thời gian $y(t) = L^{-1}[Y(s)]$ sẽ là tổng các biến đổi ngược của các thành phần riêng lẻ.

### 2.2.5 Ứng dụng biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

Xét hệ thống tuyến tính liên tục bất biến có tín hiệu vào r(t), tín hiệu ra y(t), được mô tả bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 r(t)$$

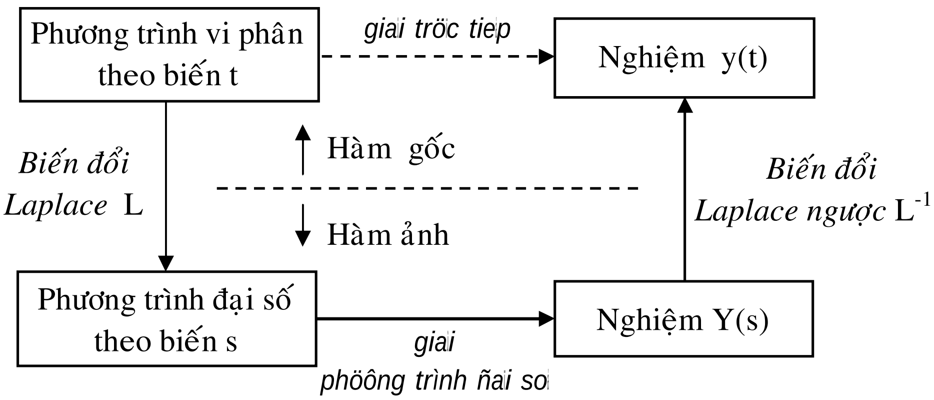
Hay dưới dạng tương đương:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m r^{(m)}(t) + b_{m-1}r^{(m-1)}(t) + \ldots + b_0 r(t) \qquad (2\text{-}20)$$

Bài toán đặt ra là tìm nghiệm y(t) khi biết trước tín hiệu vào r(t) và các điều kiện ban đầu của hệ thống.

Với phương pháp cổ điển thì việc tìm nghiệm toàn phần yêu cầu phải xác định hằng số tích phân từ các điều kiện đầu. Nếu dùng phương pháp biến đổi Laplace thì điều này là không cần thiết vì điều kiện đầu đã bao gồm trong biến đổi Laplace của các thành phần đạo hàm.

Trình tự ứng dụng biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân có thể tóm tắt theo sơ đồ dưới đây:




Biến đổi Laplace từng số hạng của phương trình vi phân (2-20), ta được :

$$L[a_n y^{(n)}(t)] = a_n s^n Y(s) - I(s)_n$$
$$L[a_{n-1} y^{(n-1)}(t)] = a_{n-1} s^{n-1} Y(s) - I(s)_{n-1}$$

…………

$$L[b_m r^{(m)}(t)] = b_m s^m R(s) - I(s)_m$$
$$L[b_{m-1} r^{(m-1)}(t)] = b_{m-1} s^{m-1} R(s) - I(s)_{m-1}$$

…………

trong đó :

$I(s)_n$, $I(s)_{n-1}$,... là các đa thức chứa các điều kiện đầu y(0), ..., $y^{(n-1)}(0)$.

$I(s)_m$, $I(s)_{m-1}$,... là các đa thức chứa các điều kiện đầu r(0),..., $r^{(m-1)}(0)$.

Thay các biến đổi vào phương trình vi phân và sắp xếp lại, ta được:

$$(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0)R(s) + I(s)$$

Với $I(s) = I(s)_n + I(s)_{n-1} + ... - I(s)_m - I(s)_{m-1} - ...$

$$\Rightarrow \qquad Y(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_0)R(s) + I(s)}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0} \qquad (2\text{-}21)$$

Sau khi tính được Y(s) ta có thể xác định nghiệm y(t) bằng cách lấy biến đổi Laplace ngược :

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

**Ví dụ 2.6.** Giải phương trình vi phân : $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y(t) = 0$

với điều kiện đầu $y(0) = a$ và $\dfrac{dy}{dt}(0) = b$.

***Giải.*** Lấy biến đổi Laplace cả hai vế phương trình đã cho, ta được :

$$[s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad [s^2Y(s) - as - b] + 3[sY(s) - a] + 2Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad (s^2+3s+2)Y(s) = as + (3a+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{as + (3a+b)}{s^2 + 3s + 2} = \frac{as + (3a+b)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a+b}{s+1} - \frac{a+b}{s+2}$$

Suy ra:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t} \qquad \text{với } t \geq 0$$

**Ví dụ 2.7.** Giải phương trình vi phân : $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 10y(t) = 8r(t)$

với điều kiện ban đầu $y(0) = \dfrac{dy(0)}{dt} = 0$, tín hiệu vào r(t) =1(t).

***Giải.*** Biến đổi Laplace cả hai vế phương trình đã cho, ta được :

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = 8R(s)$$

Tín hiệu vào bậc thang đơn vị r(t)=1(t) $\Rightarrow$ R(s)= $\dfrac{1}{s}$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{8}{s(s^2 + 2s + 10)} = \frac{4}{5s} - \frac{4(s+1)}{5[(s+1)^2 + 3^2]} - \frac{(4/3)(3)}{5[(s+1)^2 + 3^2]}$$

Hàm thời gian: $y(t) = L^{-1}[Y(s)]$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}e^{-t}\cos 3t - \frac{4}{15}e^{-t}\sin 3t \qquad \text{với } t \geq 0$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{4\sqrt{10}}{15}e^{-t}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 3t + \frac{3}{\sqrt{10}}\cos 3t\right) = \frac{4}{5} - \frac{4\sqrt{10}}{15}e^{-t}\sin(3t + \varphi)$$

với: $\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}} = 71{,}57°$

## 2.3 Hàm truyền

Xét hệ thống tuyến tính liên tục bất biến có tín hiệu vào r(t), tín hiệu ra y(t), được mô tả bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 r(t)$$

Giả thiết các điều kiện đầu bằng 0, biến đổi Laplace hai vế ta được :

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0) R(s)$$

Biểu thức
$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} \qquad (2\text{-}22)$$

được gọi là hàm truyền (hay hàm truyền đạt) của hệ thống.

***Định nghĩa:*** *Hàm truyền là tỉ số giữa ảnh Laplace của tín hiệu ra và ảnh Laplace của tín hiệu vào khi các điều kiện đầu bằng 0.*

Để có hàm truyền ta thực hiện các bước sau đây:

1) Viết phương trình vi phân mô tả hệ thống (hay phần tử).
2) Lấy biến đổi Laplace của phương trình vi phân, với giả thiết tất cả các điều kiện ban đầu bằng 0.
3) Lập tỉ số tín hiệu ra Y(s) trên tín hiệu vào R(s). Tỉ số này chính là hàm truyền.

***Nhận xét:***

- Khái niệm hàm truyền chỉ dùng cho phần tử và hệ thống tuyến tính bất biến.
- Biểu thức hàm truyền chỉ phụ thuộc vào các thông số $a_i$, $b_i$ và bậc n của hệ thống mà không phụ thuộc vào thể loại và giá trị (biên độ) tín hiệu vào, tín hiệu ra.
- Việc giả thiết các điều kiện đầu bằng 0 là dựa trên quan điểm dùng hàm truyền để nghiên cứu bản chất động học của hệ thống. Điều kiện đầu khác 0 chỉ phản ánh đặc tính động học ứng với các trường hợp riêng cụ thể.
- Vì hàm truyền là phân thức đại số không có phép vi phân và tích phân nên dùng hàm truyền để mô tả và nghiên cứu hệ thống sẽ thuận lợi hơn nhiều so với dùng phương trình vi phân. Với khái niệm hàm truyền, quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra có thể biểu diễn dưới dạng phương trình đại số :

$$Y(s) = R(s).\ G(s) \qquad (2\text{-}23)$$

(*tín hiệu ra = tích của tín hiệu vào và hàm truyền)*

Điều này giúp cho công việc xác định tín hiệu ra của hệ thống ứng với một tín hiệu vào cho trước được đơn giản hơn nhiều.

§ Đa thức mẫu số của hàm truyền được gọi là ***đa thức đặc tính***:

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots. + a_0 \qquad (2\text{-}24)$$

Nếu cho mẫu số của hàm truyền bằng 0, ta có ***phương trình đặc tính***:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots. + a_0 = 0 \qquad (2\text{-}25)$$

Trên cơ sở khảo sát các nghiệm hoặc các hệ số của phương trình đặc tính, ta có thể đánh giá tính ổn định của hệ thống. Vấn đề xét tính ổn định của hệ thống sẽ được trình bày riêng ở chương 4.

§ Hàm truyền G(s) cũng được viết dưới dạng zero-cực như sau:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = K\frac{(s-z_1)....(s-z_m)}{(s-p_1)...(s-p_n)} \qquad (2\text{-}26)$$

Trong đó :

$z_i$ (i=1...m) -là nghiệm của đa thức tử số, gọi là các ***zero***.

$p_i$ (i=1...n) -là nghiệm của đa thức mẫu số, gọi là các ***cực*** *(pole)*.

$p_i$ cũng chính là nghiệm của phương trình đặc tính.

$K = \frac{b_m}{a_n}$ - độ lợi *(gain)*.

§ Với hệ thống MIMO có q ngõ vào và p ngõ ra ta phải viết hàm truyền riêng cho từng cặp ngõ vào-ra:

$$G_{ij} = \frac{Y_i(s)}{R_j(s)} \qquad (i=1,..,p\ ;\ j=1,...,q) \qquad (2\text{-}27)$$

Quan hệ vào-ra của hệ MIMO được viết ở dạng ma trận:

$$Y(s) = G(s).R(s) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1} & \cdots & G_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_q(s) \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}28)$$

trong đó :

$Y(s) = [Y_1(s) \quad \cdots \quad Y_p(s)]^T$ - là ảnh Laplace của véctơ tín hiệu ra

$R(s) = [R_1(s) \quad \cdots \quad R_q(s)]^T$ - là ảnh Laplace của véctơ tín hiệu vào

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1} & \cdots & G_{pq} \end{bmatrix} \text{ - là ma trận hàm truyền.} \qquad (2\text{-}29)$$

§ Một hệ thống hay phần tử tuyến tính có tín hiệu vào r(t), tín hiệu ra y(t), sau khi đã được mô hình hoá và có hàm truyền G(s) thường được biểu diễn đơn giản, trực quan bằng một khối như hình vẽ:

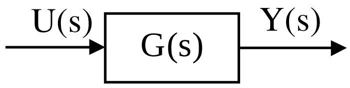

Cách biểu diễn này rất tiện cho việc cho việc xây dựng mô hình của một hệ thống phức tạp gồm nhiều khối ghép nối tiếp, song song hoặc phản hồi.

## 2.4 Sơ đồ khối

### 2.4.1 Các thành phần của sơ đồ khối

Sơ đồ khối của một hệ thống là hình vẽ mô tả chức năng của các phần tử và sự tác động qua lại giữa các phần tử trong hệ thống. Sơ đồ khối có ba thành phần cơ bản là khối chức năng, bộ tổng ( *hay* bộ so) và điểm rẽ nhánh.

- Khối chức năng:



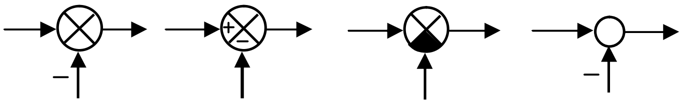

Quan hệ vào-ra: $Y(s) = U(s).\,G(s)$

*(tín hiệu ra của khối = tích của tín hiệu vào và hàm truyền)*

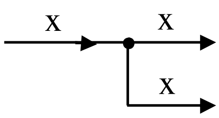
- Bộ tổng: Tín hiệu ra của bộ tổng bằng tổng đại số của các tín hiệu vào.


*Lưu ý :* - Dấu cộng trong sơ đồ thường được lược bỏ.

- Các biểu diễn sau đây là tương đương :




- Điểm rẽ: Tín hiệu trên nhánh chính và các nhánh rẽ là như nhau.



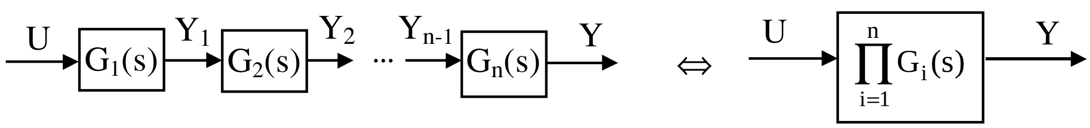

### 2.4.2 Đại số sơ đồ khối

Đại số sơ đồ khối là thuật toán biến đổi tương đương các sơ đồ khối. Hai sơ đồ khối được gọi là tương đương nhau nếu chúng có quan hệ giữa tín hiệu vào, tín hiệu ra như nhau.

Để tìm hàm truyền của hệ thống có sơ đồ khối phức tạp, ta thường tìm cách biến đổi sơ đồ khối để làm xuất hiện các dạng kết nối đơn giản rồi lần lượt tính các hàm truyền tương đương theo nguyên tắc *rút gọn dần từ trong ra ngoài*.

Sau đây là một số quy tắc biến đổi sơ đồ khối thường dùng.

***1) Hệ nối tiếp***

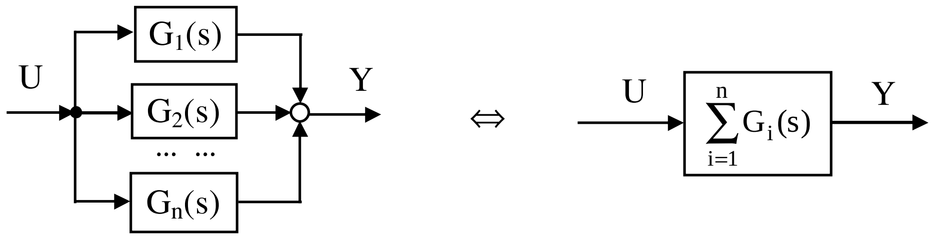



Theo sơ đồ khối ta có: $Y(s) = U(s).G_1(s).G_2(s)...G_n(s)$

$\Rightarrow$ Hàm truyền tương đương:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s).G_2(s)...G_n(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s) \qquad (2\text{-}30)$$

*2) Hệ song song*



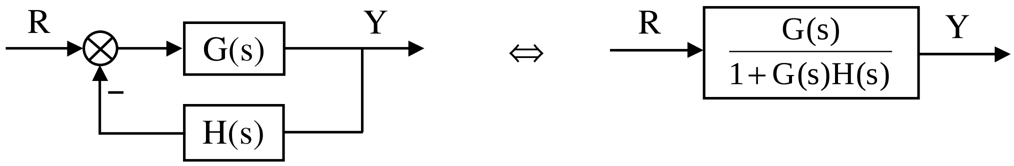

Theo sơ đồ khối ta có: $Y(s) = U(s)G_1(s) + U(s)G_2(s) + ... + U(s)G_n(s)$

⇒ Hàm truyền tương đương:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) + ... + G_n(s) = \sum_{i=1}^{n} G_i(s) \qquad (2\text{-}31)$$

*3) Hệ hồi tiếp một vòng*

- ***Hồi tiếp âm***




Từ sơ đồ khối ta có các phương trình mô tả quan hệ vào-ra:

$$\begin{cases} -Y(s)H(s) + R(s) = E(s) \\ E(s)G(s) = Y(s) \end{cases}$$

⇒ $[-Y(s)H(s) + R(s)]\, G(s) = Y(s)$

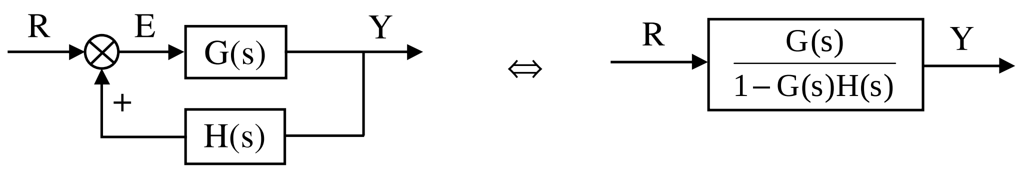
⇒ Hàm truyền của hệ kín hồi tiếp âm :

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad (2\text{-}32)$$

Trường hợp đặc biệt khi hàm truyền mạch phản hồi H(s)=1, ta có hệ thống hồi tiếp âm đơn vị. Khi đó công thức (2-32) trở thành:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \qquad (2\text{-}33)$$

- ***Hồi tiếp dương***




Từ sơ đồ khối ta có các phương trình quan hệ :

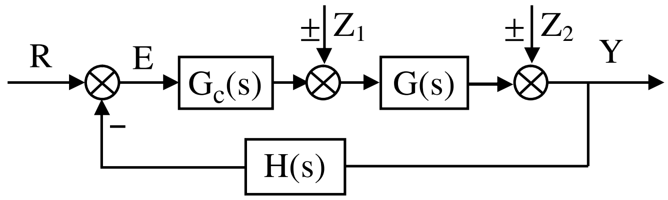
$$\begin{cases} Y(s)H(s) + R(s) = E(s) \\ E(s)G(s) = Y(s) \end{cases}$$

⇒ $[Y(s)H(s) + R(s)]\, G(s) = Y(s)$

⇒ Hàm truyền : $G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$ (2-34)

- ***Hệ hồi tiếp có nhiễu tác động***

Xét hệ hồi tiếp (hệ kín) có sơ đồ khối:




Nếu coi nhiễu $z_1(t)=z_2(t)=0$, ta có phương trình quan hệ:

$$[-Y(s)H(s)+R(s)].G_c(s).G(s) = Y(s)$$

$\Rightarrow$ Hàm truyền của tín hiệu vào r(t):

(thường được coi là hàm truyền của hệ kín, nếu không tính đến nhiễu)

$$G_k(s) = G_R(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} \qquad (2\text{-}35a)$$

Nếu coi tín hiệu vào r(t)=0 và nhiễu $z_2(t)=0$, ta có :

$$[-Y(s)H(s)G_c(s) \pm Z_1(s)].G(s) = Y(s)$$

$\Rightarrow$ Hàm truyền của nhiễu $z_1(t)$:

$$G_{Z1}(s) = \frac{Y(s)}{Z_1(s)} = \frac{\pm G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} \qquad (2\text{-}35b)$$

Nếu coi tín hiệu vào r(t)=0 và nhiễu $z_1(t)=0$, ta có :

$$-Y(s)H(s)G_c(s)G(s) \pm Z_2(s) = Y(s)$$

$\Rightarrow$ Hàm truyền của nhiễu $z_2(t)$:

$$G_{Z2}(s) = \frac{Y(s)}{Z_2(s)} = \frac{\pm 1}{1+G_c(s)G(s)H(s)} \qquad (2\text{-}35c)$$

Áp dụng nguyên lý xếp chồng đáp ứng, ta có thể biểu diễn quan hệ vào-ra của hệ kín có nhiễu như sau:

$$Y_\Sigma(s) = \sum Y_i(s) = \frac{G_c(s)G(s)R(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} \pm \frac{G(s)Z_1(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} \pm \frac{Z_2(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)}$$

(2-35d)

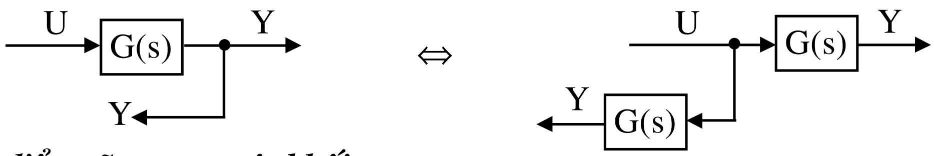
***Nhận xét:***

Nếu lấy $\left|G_c(s)H(s)\right| >> 1$ và $\left|G_c(s)G(s)H(s)\right| >> 1$ thì $G_{Z1}(s)$ và $G_{Z2}(s)$ sẽ xấp xỉ 0, tức là ảnh hưởng của nhiễu sẽ bị suy giảm mạnh.

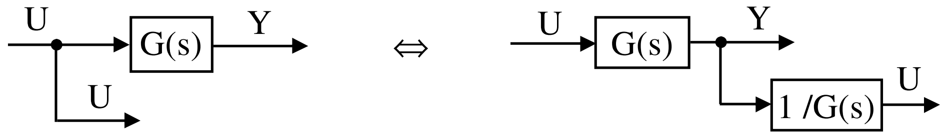
Mặt khác, nếu $\left|G_c(s)G(s)H(s)\right| >> 1$ thì $G_R(s) = Y(s)/R(s) \approx 1/H(s)$, nên $Y(s) \approx R(s)/H(s)$, tức là khi đó đáp ứng của hệ kín không còn phụ thuộc vào $G_c(s)$ và G(s) mà chỉ phụ thuộc vào H(s).

Như vậy, hệ kín có ưu điểm là ít nhạy cảm với nhiễu cũng như với sự thay đổi của các thông số bên trong của hệ thống. Đây là điều không thể được đối với hệ hở. Tuy nhiên cũng cần lưu ý là điều kiện $\left|G_c(s)G(s)H(s)\right| >> 1$ sẽ làm tăng tính dao động của đáp ứng nên vấn đề ổn định của hệ kín sẽ phức tạp hơn hệ hở.

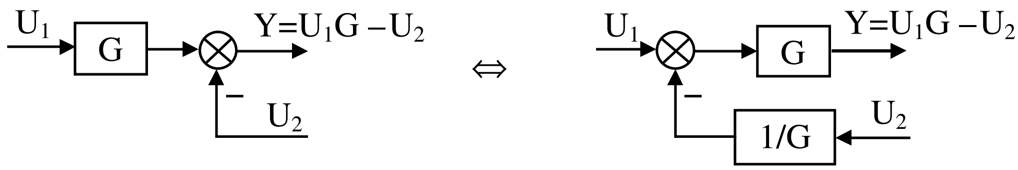
*4) Chuyển điểm rẽ ra trước một khối*



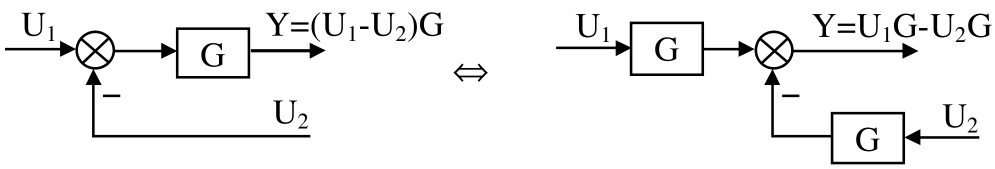

*5) Chuyển điểm rẽ ra sau một khối*



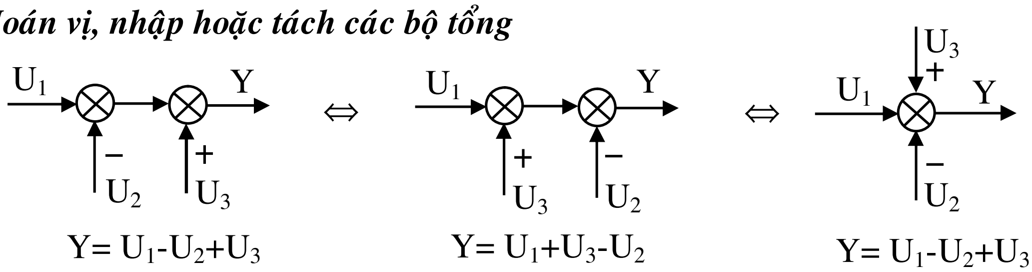

*6) Chuyển bộ tổng (bộ so) ra trước một khối*



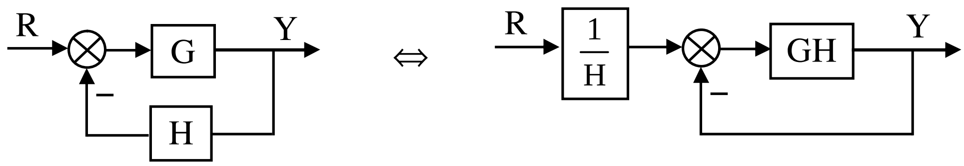

*7) Chuyển bộ tổng (bộ so) ra sau một khối*




*8) Hoán vị, nhập hoặc tách các bộ tổng*

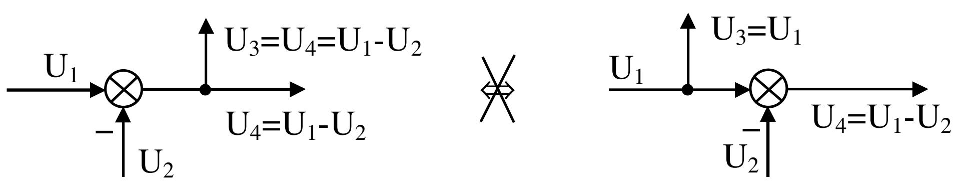



*9) Chuyển về dạng hồi tiếp đơn vị*

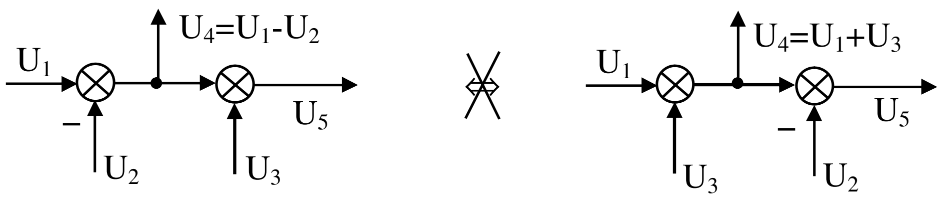



***Lưu ý:*** Các biến đổi sau đây là ***<u>không tương đương</u>***.

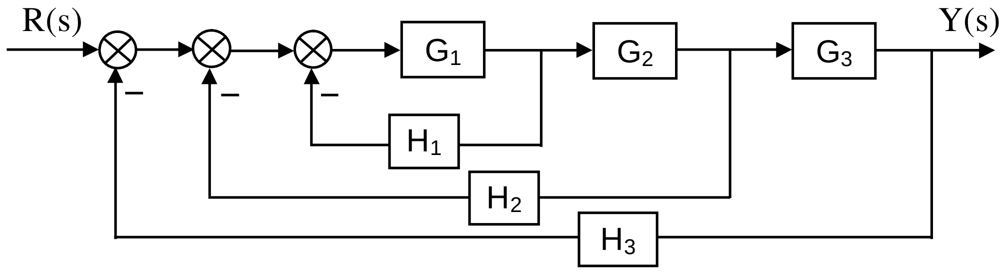
- Chuyển vị trí điểm rẽ và bộ tổng:




- Chuyển vị trí hai bộ tổng khi giữa hai bộ tổng đó có điểm rẽ:



**Ví dụ 2.8.** Tìm hàm truyền tương đương của hệ thống sau :




***Giải.*** Lần lượt rút gọn sơ đồ khối từ trong ra ngoài, ta được:

Hàm truyền của mạch kín hồi tiếp âm $G_1$–$H_1$ :

$$G_{tđ1} = \frac{G_1}{1 + G_1H_1}$$

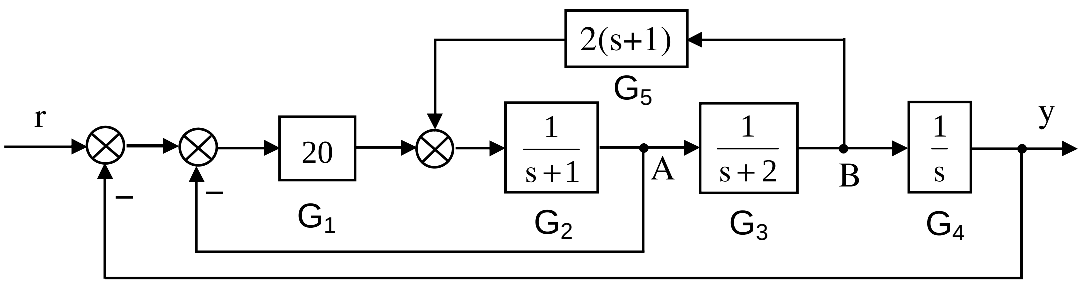
Hàm truyền của mạch kín hồi tiếp âm $G_{tđ1}$–$G_2$– $H_2$ :

$$G_{tđ2} = \frac{G_{tđ1}G_2}{1 + G_{tđ1}G_2H_2} = \frac{\dfrac{G_1G_2}{1 + G_1H_1}}{1 + \dfrac{G_1G_2H_2}{1 + G_1H_1}} = \frac{G_1G_2}{1 + G_1H_1 + G_1G_2H_2}$$

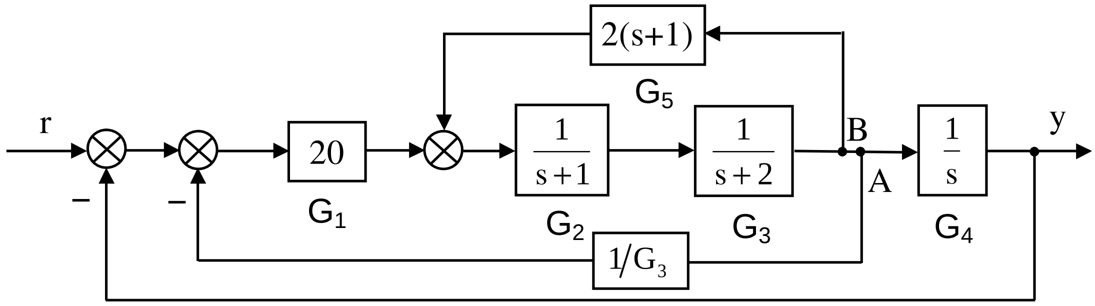
Hàm truyền $G_k(s)$ của hệ thống cũng là hàm truyền của mạch kín hồi tiếp âm $G_{tđ2}$ –$G_3$– $H_3$ . Ta có:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{tđ2}G_3}{1 + G_{tđ2}G_3H_3} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_1H_1 + G_1G_2H_2 + G_1G_2G_3H_3}$$

**Ví dụ 2.9.** Tìm hàm truyền tương đương của hệ thống sau :




**CÁCH GIẢI 1 :** Chuyển điểm rẽ A ra sau khối $G_3$ ta được sơ đồ tương đương :

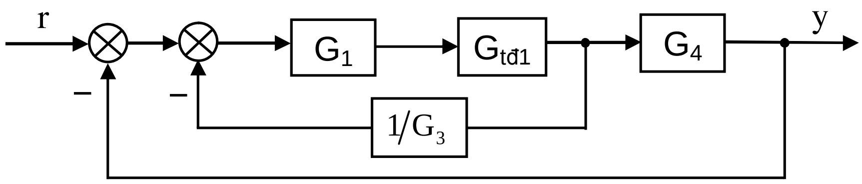



*(Lưu ý là trên sơ đồ này, các điểm A và B có thể hoán vị nhau hoặc đặt trùng nhau đều được vì không còn khối nào ở giữa chúng.)*

Hàm truyền của mạch kín hồi tiếp dương $G_2 – G_3 – G_5$ :

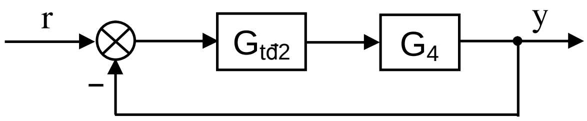
$$G_{tđ1} = \frac{G_2G_3}{1 - G_2G_3G_5}$$

Hàm truyền của mạch kín hồi tiếp âm $G_1 – G_{tđ1} – 1/G_3$ :




$$G_{tđ2} = \frac{G_1G_{tđ1}}{1 + G_1G_{tđ1}\dfrac{1}{G_3}} = \frac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1 - G_2G_3G_5}}{1 + \dfrac{G_1G_2}{1 - G_2G_3G_5}} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_2G_3G_5 + G_1G_2}$$

Cuối cùng, hệ thống tương đương với hệ hồi tiếp âm đơn vị $G_{tđ2} – G_4 – 1$ :



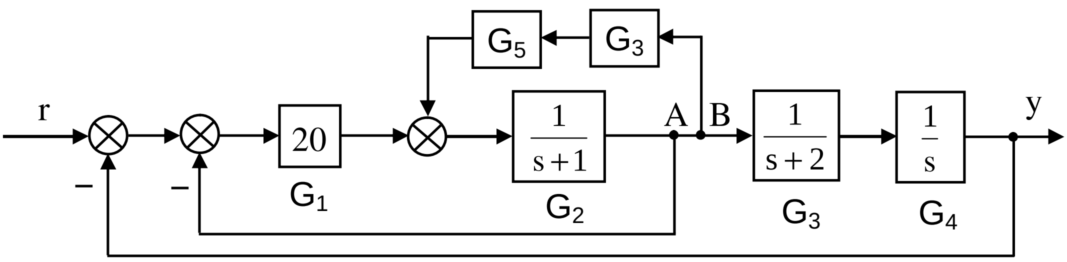

Do đó hàm truyền tương đương của toàn hệ thống là:

$$G_{tđ} = \frac{G_{tđ2}G_4}{1 + G_{tđ2}G_4} = \frac{\dfrac{G_1G_2G_3G_4}{1 - G_2G_3G_5 + G_1G_2}}{1 + \dfrac{G_1G_2G_3G_4}{1 - G_2G_3G_5 + G_1G_2}} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 - G_2G_3G_5 + G_1G_2 + G_1G_2G_3G_4}$$

Thay số vào ta được: $G_{tđ} = \dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{20}{s^3 + 21s^2 + 40s + 20}$

**CÁCH GIẢI 2 :**

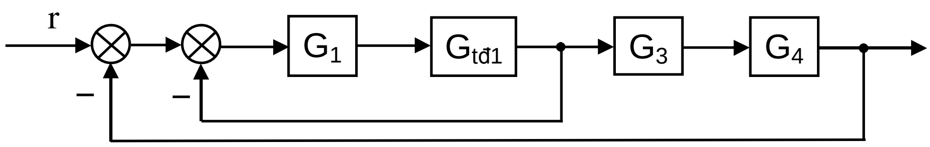
Trước tiên, chuyển điểm rẽ B ra trước khối $G_3$ ta được sơ đồ tương đương :




Hàm truyền của mạch kín hồi tiếp dương $G_2 – G_3 – G_5$ :

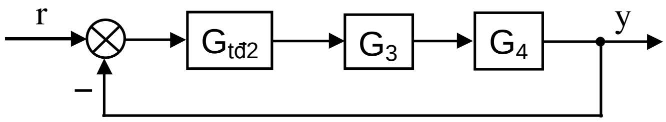
$$G_{tđ1} = \frac{G_2}{1 - G_2G_3G_5}$$

Hàm truyền của mạch kín hồi tiếp âm đơn vị $G_1 – G_{tđ1} – 1$ :




$$G_{tđ2} = \frac{G_1G_{tđ1}}{1+G_1G_{tđ1}} = \frac{G_1G_2}{1-G_2G_3G_5+G_1G_2}$$

Cuối cùng, hệ thống tương đương với hệ hồi tiếp âm đơn vị $G_{tđ2}$–$G_3$–$G_4$–1 :

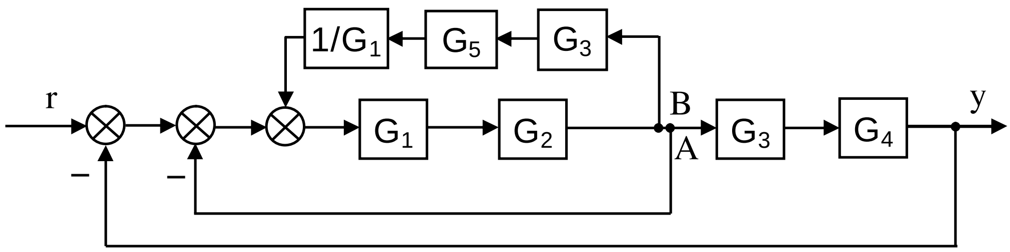



Suy ra hàm truyền tương đương của hệ thống là:

$$G_{tđ} = \frac{G_{tđ2}G_3G_4}{1+G_{tđ2}G_3G_4} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_2G_3G_5+G_1G_2+G_1G_2G_3G_4} = \frac{20}{s^3+21s^2+40s+20}$$

**CÁCH GIẢI 3 :**

Trước tiên, chuyển bộ so cuối ra trước khối $G_1$ và chuyển điểm rẽ B ra trước khối $G_3$ ta được sơ đồ tương đương:




Hàm truyền của mạch kín hồi tiếp dương $G_1$–$G_2$–$G_3$–$G_5$–$1/G_1$ :

$$G_{tđ1} = \frac{G_1G_2}{1-G_1G_2G_3G_5(1/G_1)} = \frac{G_1G_2}{1-G_2G_3G_5}$$

Hàm truyền của mạch kín hồi tiếp âm đơn vị $G_{tđ1}$–1 :

$$G_{tđ2} = \frac{G_{tđ1}}{1+G_{tđ1}} = \frac{G_1G_2}{1-G_2G_3G_5+G_1G_2}$$

Cuối cùng, hệ thống tương đương với hệ hồi tiếp âm đơn vị $G_{tđ2}$–$G_3$–$G_4$–1.

Suy ra hàm truyền tương đương của hệ thống là:

$$G_{tđ} = \frac{G_{tđ2}G_3G_4}{1+G_{tđ2}G_3G_4} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_2G_3G_5+G_1G_2+G_1G_2G_3G_4} = \frac{20}{s^3+21s^2+40s+20}$$

***Nhận xét*** : Cả ba cách giải trên đều cho kết quả như nhau.

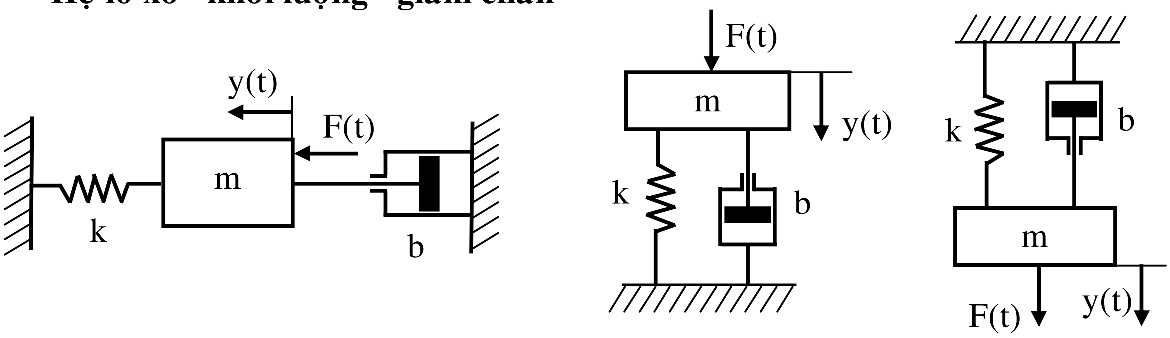
## 2.5 Hàm truyền của các khâu vật lý điển hình

Các khâu (phần tử) của hệ thống điều khiển có thể là cơ khí, điện, thuỷ lực, khí nén, nhiệt,... Trong mục này chúng ta sẽ xây dựng hàm truyền của các khâu vật lý thường gặp trong kỹ thuật.

### 2.5.1 Phần tử cơ khí

Các hệ cơ khí chuyển động thẳng có 3 thông số cơ bản là khối lượng, độ cứng và ma sát nhớt. Với chuyển động quay thì 3 thông số tương ứng là mômen quán tính, độ cứng xoắn và ma sát nhớt. Khối lượng đặc trưng cho quán tính. Độ cứng đặc trưng cho hoạt động của lực đàn hồi tương tự như lực của lò xo. Ma sát nhớt (hay giảm chấn) đặc trưng cho phần tử hấp thụ năng lượng.

· **Hệ lò xo - khối lượng - giảm chấn**




***Hình 2.2*** *Hệ lò xo - khối lượng - giảm chấn*

- Tín hiệu vào : lực F(t) tác dụng từ bên ngoài, [N]
- Tín hiệu ra : lượng di động y(t) của khối lượng m, [m]

Giả sử tại t=0 hệ đang ở trạng thái cân bằng và không tính đến lực trọng trường. Theo định luật II Newton ta có phương trình cân bằng lực:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_i = F(t) - b\frac{dy}{dt} - k.y(t)$$

Trong đó, m : khối lượng, [kg]
b : hệ số ma sát nhớt (giảm chấn), [N.s/m ]
k : độ cứng lò xo, [N/m ]
$m\frac{d^2y}{dt^2}$ : lực quán tính, [N]
$b\frac{dy}{dt}$ : lực giảm chấn, [N]
k.y(t) : lực lò xo, [N]

$\Rightarrow$ Phương trình vi phân mô tả quan hệ vào - ra :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + k\,y(t) = F(t)$$

Biến đổi Laplace hai vế với điều kiện đầu bằng 0, ta được:

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = F(s)$$

Lập tỉ số tín hiệu ra trên tín hiệu vào ta được hàm truyền bậc hai:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \tag{2-36}$$

$\Rightarrow$ Sơ đồ khối :

$$F(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{ms^2 + bs + k}} \longrightarrow Y(s)$$

***Nhận xét:***

- Nếu khối lượng m là nhỏ, không đáng kể, ta có hàm truyền bậc nhất:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{bs + k}$$

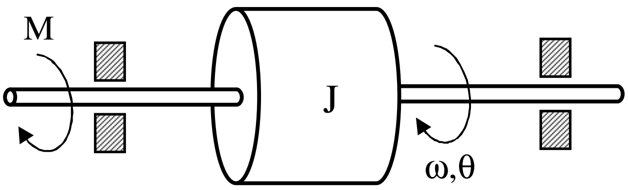
- Nếu chỉ có thành phần lò xo, ta có hàm truyền tỉ lệ:

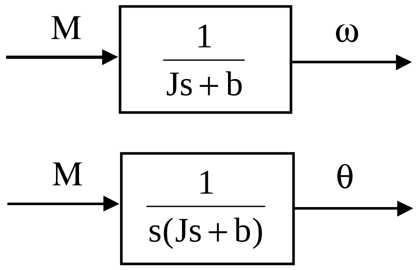
$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{k}$$

- Nếu chỉ có thành phần giảm chấn, ta có hàm truyền tích phân:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{bs}$$

· **Phần tử quay**




***Hình 2.3***

Xét một trục mang tải quay có quán tính J như hình 2.3.

Tại các bề mặt tiếp xúc khi quay (ổ đỡ, phanh hãm,...) sẽ xuất hiện mômen ma sát $M_{ms}$ ngược chiều chuyển động và tỉ lệ với vận tốc góc $\omega$.

$$M_{ms} = b\omega = b\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{với } b : \text{hệ số ma sát nhớt}$$

Trục quay cũng chịu biến dạng đàn hồi tương tự như một lò xo xoắn. Mômen đàn hồi xoắn $M_x$ ngược chiều chuyển động và tỉ lệ với góc quay $\theta$ của trục.

$$M_x = k\theta(t) = k\int \omega dt \qquad \text{với } k\text{: độ cứng lò xo xoắn}$$

Trong thực tế ảnh hưởng của đàn hồi xoắn trên trục động cơ và các tải quay thường được bỏ qua (nói cách khác, coi trục là cứng tuyệt đối). Áp dụng định luật II Newton cho chuyển động quay, ta có phương trình cân bằng mômen :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \sum M_i = M - b\omega$$

trong đó: M : mômen tác động, [Nm]

J : mômen quán tính của vật quay, [kg.m $^2$]

$\omega$ : vận tốc góc, [ rad/s]

b : hệ số ma sát nhớt (giảm chấn quay), [Nm.s/rad]

Xét M là tín hiệu vào, ω là tín hiệu ra, ta có :

$$J\frac{d\omega}{dt} + b\omega = M$$

Biến đổi Laplace hai vế với điều kiện đầu bằng 0, ta được:

$$Js\omega(s) + b\omega(s) = M(s)$$

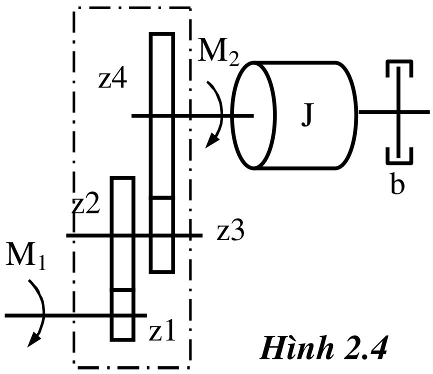
Lập tỉ số tín hiệu ra trên tín hiệu vào ta được hàm truyền:

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js + b} \qquad (2\text{-}37a)$$

Xét M là tín hiệu vào, góc quay θ là tín hiệu ra, ta có :

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{s(Js + b)} \qquad (2\text{-}37b)$$

· **Hộp giảm tốc bánh răng**




***Hình 2.4***

Các hộp giảm tốc bánh răng thường được sử dụng để giảm tốc độ, tăng mômen, hoặc để đạt hiệu suất truyền năng lượng cao nhất từ động cơ sang tải.

Trong thực tế các bánh răng và các bộ truyền động cơ khí nói chung đều có khe hở (độ rơ) nhất định giữa các khớp. Độ rơ sẽ gây nên các hành trình chết, ảnh hưởng đến độ chính xác truyền động và tính ổn định của hệ thống. Các ảnh hưởng này mang tính phi tuyến. Trong phần này ta giả định bộ truyền không có khe hở và coi hệ là tuyến tính.

Xét hệ cơ khí gồm một tải quay có mômen quán tính J, ma sát nhớt b và một hộp giảm tốc gồm 4 bánh răng như hình vẽ 2.4.

Gọi $\omega_1$, $\theta_1$ lần lượt là vận tốc góc, góc quay của trục ngõ vào hộp giảm tốc
$\omega_2$, $\theta_2$ lần lượt là vận tốc góc, góc quay của trục ngõ ra hộp giảm tốc
$M_1$, $M_2$ lần lượt là mômen tác động lên trục vào và ra hộp giảm tốc.
z1, z2, z3, z4 lần lượt là số răng của các bánh răng.

Giả thiết là các trục bánh răng và tải có độ cứng rất lớn (không có đàn hồi), bỏ qua ma sát trong hộp giảm tốc. Ta có:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{z1}{z2}.\frac{z3}{z4} = \frac{1}{i} = k \qquad \text{Với i là tỉ số truyền của hộp giảm tốc.}$$

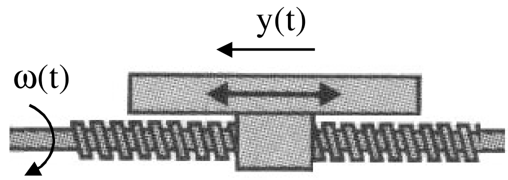
$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_2(s)}{M_2(s)} = \frac{k^2\omega_1(s)}{M_1(s)} = \frac{1}{Js + b} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1(s)}{M_1(s)} = \frac{1}{k^2Js + k^2b} = \frac{1}{J_1s + b_1}$$

Với $J_1 = k^2J$ là mômen quán tính quy về trục vào hộp giảm tốc
$b_1 = k^2b$ là hệ số ma sát quy về trục vào hộp giảm tốc

***<u>Nhận xét</u>***: Với hộp giảm tốc thì i>1, k<1 và $J_1<J$ ; $b_1<b$ ; $\omega_2<\omega_1$; $M_2>M_1$ .

- **Bộ truyền trục vítme- đai ốc**

Xét bộ truyền vitme- đai ốc như hình vẽ:




Tín hiệu vào : vận tốc góc $\omega(t)$ của vítme [rad/s]
Tín hiệu ra: lượng di động y(t) của bàn máy gắn liền với đai ốc, [m]
Gọi P [m] là bước của vítme, ta có phương trình quan hệ:

$$y(t) = \frac{P}{2\pi}.\int_0^t \omega(t)dt$$

Biến đổi Laplace hai vế với điều kiện đầu bằng 0, ta được:

$$Y(s) = \frac{P}{2\pi}.\frac{\omega(s)}{s}$$

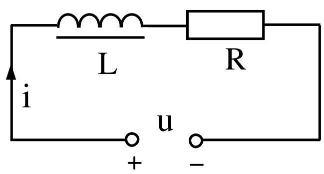
Lập tỉ số tín hiệu ra trên tín hiệu vào ta được hàm truyền tích phân:

$$\frac{Y(s)}{\omega(s)} = \frac{P}{2\pi s} = \frac{K}{s}$$

với $K = \dfrac{P}{2\pi}$ : hệ số tích phân

### 2.5.2 Phần tử điện

- **Mạch RL nối tiếp**




- Tín hiệu vào : điện áp u(t)
- Tín hiệu ra : dòng điện i(t)

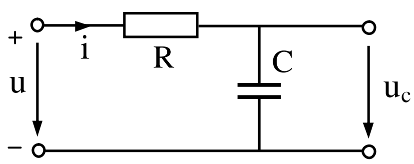
Áp dụng định luật Kirchhoff ta có:

$$u = u_L + u_R = L\frac{di}{dt} + Ri$$

Biến đổi Laplace hai vế ta được: $U(s) = (Ls + R)I(s)$

$\Rightarrow$ Hàm truyền : $G(s) = \dfrac{I(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{Ls + R}$ (2-38)

- **Mạch RC nối tiếp**




- Tín hiệu vào : điện áp u
- Tín hiệu ra : điện áp $u_c$ ở tụ điện C.

Theo định luật Kirchhoff ta có:

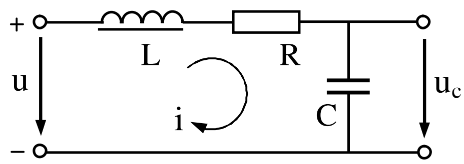
$$u = u_R + u_c = Ri + u_c$$

mà : $u_c = \dfrac{1}{C}\int idt \quad \Rightarrow \quad i = C\dfrac{du_c}{dt}$

$\Rightarrow$ Phương trình vi phân bậc nhất : $u = RC\dfrac{du_c}{dt} + u_c$

$\Rightarrow$ Hàm truyền: $G(s) = \dfrac{U_c(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{RCs+1}$ (2-39)

- **Mạch RLC nối tiếp**




- Tín hiệu vào : điện áp u
- Tín hiệu ra : điện áp $u_c$

Theo định luật Kirchhoff ta có:

$$u = u_R + u_L + u_c$$

$$\Leftrightarrow \quad u = L\frac{di}{dt} + Ri + u_c \qquad (*)$$

mà : $u_c = \dfrac{1}{C}\int idt \quad \Rightarrow \quad i = C\dfrac{du_c}{dt}$ ; $\dfrac{di}{dt} = C\dfrac{d^2u_c}{dt^2}$

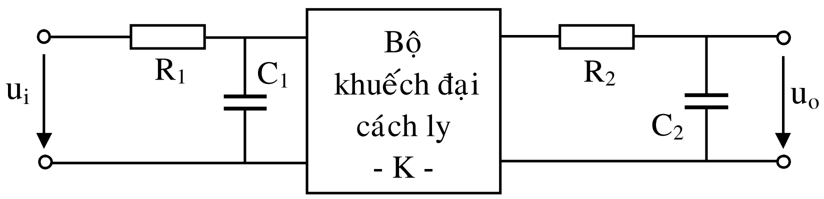
Thế vào (*), ta được phương trình vi phân bậc hai :

$$u = LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c$$

$\Rightarrow$ Hàm truyền: $G(s) = \dfrac{U_c(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$ (2-40)

- **Bộ khuếch đại cách ly**

Xét hệ thống trên hình 2.5. Hệ thống gồm hai mạch RC ghép nối với nhau bằng một bộ khuếch đại cách ly có hệ số khuếch đại K.




***Hình 2.5***

Bộ cách ly có tác dụng tạo cách ly về điện giữa các tầng mạch điện hay giữa mạch điều khiển và mạch động lực. Thông thường, các bộ cách ly có tổng trở vào rất lớn còn tổng trở ra rất nhỏ. Do đó nó không tạo ra tác động phụ tải (nhiễu) khi ghép tầng các mạch thành phần. Hàm truyền chung sẽ là hàm truyền hệ nối tiếp :

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{R_1C_1s+1}.K.\frac{1}{R_2C_2s+1} \qquad (2\text{-}41)$$

- **Cảm biến**

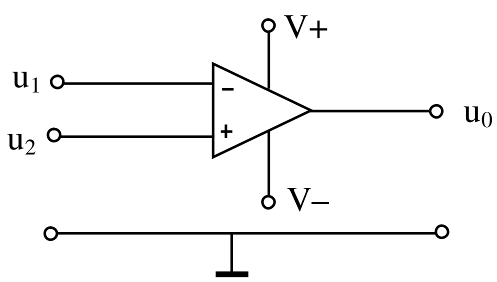
Các cảm biến thường có tín hiệu ra $y_{ht}(t)$ tỉ lệ với tín hiệu vào y(t). Ví dụ: Một cảm biến đo áp suất trong tầm 0 ÷10 bar và chuyển thành điện áp trong tầm 0÷10V sẽ có hàm truyền là H(s)=K =1; Một cảm biến nhiệt đo nhiệt độ trong tầm 0÷500°C và chuyển thành điện áp 0÷10V sẽ có hàm truyền là H(s)=K =0,02.

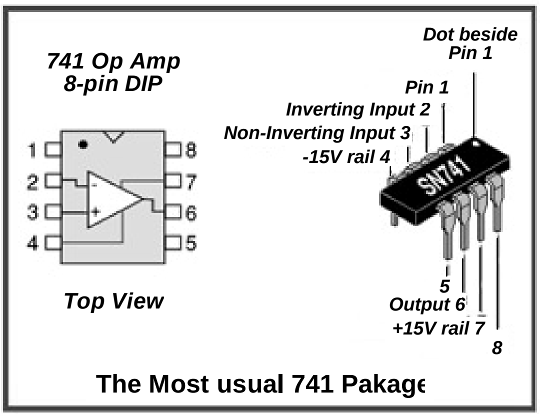
- **Khuếch đại thuật toán (op-amp)**

Khuếch đại thuật toán (op-amp, operation amplifier) là một vi mạch điện tử (IC) có chức năng khuếch đại tín hiệu với hệ số khuếch đại rất lớn. Op-amp thường được ghép nối thành các mạch cảm biến, bộ lọc tín hiệu, bộ điều khiển.

Hình 2.6 biểu diễn ký hiệu và hình dạng vỏ ngoài của một op-amp điển hình. Nguồn điện cung cấp (V+,V-) có giá trị ±15Volt. Về cơ bản op-amp có 2 ngõ vào (ngõ đảo và ngõ không đảo) và một ngõ ra. Thông thường thì chọn đất là 0V và đo các tín hiệu vào, ra so với đất. Tín hiệu $u_1$ vào ngõ (-) sẽ bị đảo còn $u_2$ vào ngõ (+) không bị đảo. Tín hiệu ngõ ra $u_0$ tỉ lệ với hiệu của hai tín hiệu vào:

$$u_0 = K(u_2 - u_1) = -K(u_1 - u_2)$$




***Hình 2.6**. Ký hiệu và hình dạng thực tế của một op-amp.*

Tín hiệu vào $u_1$ và $u_2$ có thể là tín hiệu một chiều hay xoay chiều. K là hệ số khuếch đại, giá trị $K \approx 10^5 \div 10^6$ với tín hiệu một chiều và xoay chiều khi tần số <10Khz. Hệ số này giảm khi tần số tăng và $K \approx 1$ ở tần số 1Mhz ÷ 50Mhz.

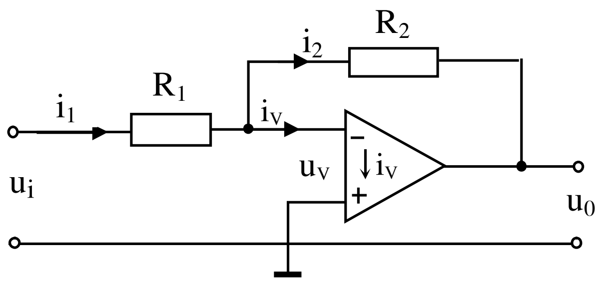
Bộ khuếch đại là tuyến tính lý tưởng khi không có dòng vào cửa vào và điện áp ra không bị ảnh hưởng (sụt áp) bởi tải nối vào nó. Nói cách khác, tổng trở vào của bộ khuếch đại là vô cùng lớn và tổng trở ra của bộ khuếch đại bằng 0.

Trong thực tế, có một dòng rất nhỏ đi vào cửa vào op-amp và tồn tại một ảnh hưởng nhỏ của tải lên điện áp ra. Trong tính toán lý thuyết ta thường giả định op-amp là một bộ khuếch đại tuyến tính lý tưởng.

- **Bộ khuếch đại đảo**

Xét mạch khuếch đại đảo dùng op-amp biểu diễn trên hình 2.7.

- Tín hiệu vào: điện áp $u_i$
- Tín hiệu ra: điện áp $u_0$




***Hình 2.7** Bộ khuếch đại đảo*

Ta có: $i_1 = \dfrac{u_i - u_v}{R_1}$ ; $i_2 = \dfrac{u_v - u_0}{R_2}$

Vì dòng vào op-amp rất nhỏ, có thể bỏ qua ($i_V \approx 0$), nên ta có $i_1 = i_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_i - u_v}{R_1} = \frac{u_v - u_0}{R_2}$$

Vì $K(0 - u_v) = u_0$ và K>>1, nên $u_V \approx 0$ .

Do đó : $\dfrac{u_i}{R_1} = -\dfrac{u_0}{R_2}$

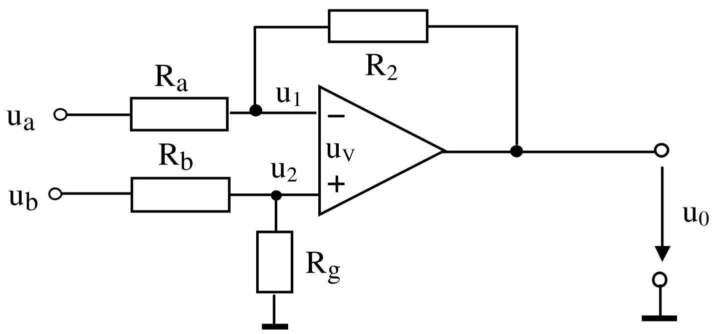
Hàm truyền: $G(s) = \dfrac{U_0(s)}{U_i(s)} = \dfrac{u_0(t)}{u_i(t)} = -\dfrac{R_2}{R_1}$

Hệ số khuếch đại : $K = -\dfrac{R_2}{R_1}$

Nếu $R_1$=$R_2$ thì mạch op-amp hoạt động như một mạch đảo dấu.

- **Bộ khuếch đại vi sai**

Bộ khuếch đại vi sai là mạch khuếch đại hiệu điện áp của 2 tín hiệu vào, mà cả hai không bằng 0. Sơ đồ mạch được trình bày ở hình 2-8.




**Hình 2.8** *Bộ khuếch đại vi sai (bộ so điện áp)*

- Tín hiệu vào : $u_a$ và $u_b$ ; Tín hiệu ra : $u_0$

Giả định $u_1 = u_2$ (hay $u_V \approx 0$ ) và dùng bộ phân áp $R_b$ và $R_g$ :

$$u_1 = u_2 = \frac{R_g}{R_b + R_g}.u_b$$

Dòng điện chạy qua $R_a$ và $R_2$ được thể hiện như sau:

$$\frac{u_a - u_1}{R_a} = \frac{u_1 - u_0}{R_2}$$

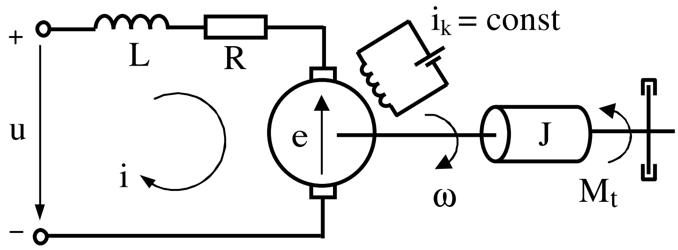
Từ đây rút ra:

$$u_0 = \left(\frac{R_2}{R_a} + 1\right)u_1 - \frac{R_2}{R_a}u_a = \left(\frac{R_g}{R_b + R_g}\right)\left(\frac{R_2}{R_a} + 1\right)u_b - \frac{R_2}{R_a}u_a \qquad (2\text{-}42)$$

Từ phương trình (2-42) và khi cho $R_2 = R_a = R_g$ , ta có : $u_0 = u_b - u_a$

### 2.5.3 Động cơ điện DC

Điển hình của loại này là động cơ điện một chiều kích từ độc lập, điều khiển bằng điện áp phần ứng. Sơ đồ nguyên lý của loại động cơ này được thể hiện trên hình 2.9, trong đó dòng kích từ $i_k$ được giữ không đổi.




***Hình 2.9*** *Sơ đồ nguyên lý động cơ điện DC*

- Tín hiệu vào là điện áp u đặt vào phần ứng, [Volt;V]
- Tín hiệu ra là vận tốc góc $\omega$ của động cơ, [rad/s; $s^{-1}$]

Sử dụng ba phương trình cơ bản :

1) Phương trình mạch điện phần ứng :

$$u = L\frac{di}{dt} + Ri + K_e\omega \qquad (2\text{-}43)$$

Trong đó: R_ điện trở phần ứng, [ Ω]

L_ điện cảm phần ứng, [Henry; H=V.s/A]

i_ dòng điện phần ứng, [A]

$K_e$ _hằng số sức điện động, [V.s /rad]

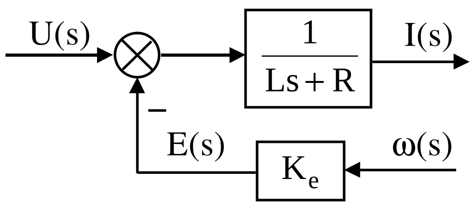
$K_e\omega = e$ : sức điện động ở phần ứng, [V].

Biến đổi Laplace hai vế phương trình, ta được:

$$U(s) = LsI(s) + RI(s) + K_e\omega(s)$$

$$\Rightarrow \quad U(s) - K_e\omega(s) = (Ls + R)I(s)$$

Sơ đồ khối tương ứng :




2) Phương trình mômen điện từ của động cơ :

Với dòng kích từ $i_k$ không đổi thì từ thông khe khí $\Phi = k_2 i_k$ là không đổi và mômen điện từ M của động cơ tỉ lệ với dòng điện phần ứng:

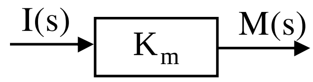
$$M = K_m i \qquad (2\text{-}44)$$

Trong đó $K_m$ là hằng số mômen của động cơ , [N.m/A]

$K_m = k_1\Phi = k_1 k_2 i_k$ , với $k_1$ là hằng số phụ thuộc kết cấu động cơ, $k_2$ là hằng số đặc trưng đoạn tuyến tính của từ thông thay đổi theo $i_k$.

Biến đổi Laplace hai vế ta được: $M(s) = K_m I(s)$

Sơ đồ khối tương ứng:




3) Phương trình cân bằng mômen trên trục động cơ :

$$M = J\frac{d\omega}{dt} + B\omega + M_t \quad (2\text{-}45)$$

Trong đó:

J _mô men quán tính của động cơ và tải quy về trục động cơ, [kg.m $^2$]

B_hệ số ma sát nhớt của động cơ và tải quy về trục động cơ, [Nm.s]

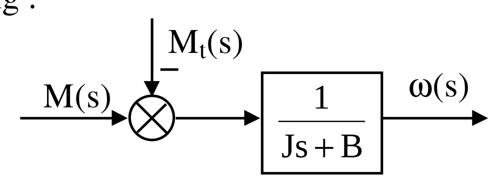
$M_t$ _mô men phụ tải (nhiễu), [Nm]

Biến đổi Laplace hai vế ta được:

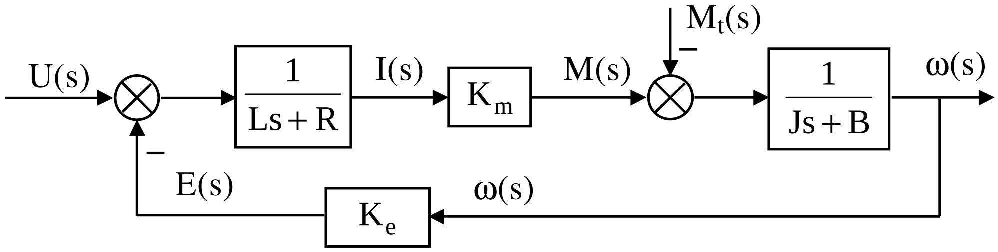
$$M(s) = Js\omega(s) + B\omega(s) + M_t(s)$$

$$M(s) - M_t(s) = (Js + B)\omega(s)$$

Sơ đồ khối tương ứng :




Kết nối các sơ đồ khối thành phần ở trên ta có sơ đồ khối của động cơ :




· Hàm truyền của động cơ DC với tín hiệu ra vận tốc :

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{K_m}{(Ls+R)(Js+B)}}{1 + \dfrac{K_m K_e}{(Ls+R)(Js+B)}} = \frac{K_m}{(Ls+R)(Js+B) + K_m K_e} \quad (2\text{-}46)$$

Hay: $$G(s) = \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{K_m}{LJs^2 + (LB + RJ)s + (K_m K_e + RB)} \quad (2\text{-}47)$$

Đặt $\tau_t = \dfrac{L}{R}$ : hằng số thời gian điện từ.

$\tau_c = \dfrac{J}{B}$ : hằng số thời gian cơ.

$$\Rightarrow \quad G(s)=\frac{\omega(s)}{U(s)}=\frac{K_m}{RB(\tau_t s+1)(\tau_c s+1)+K_mK_e}=\frac{K_m/RB}{\tau_t\tau_c s^2+(\tau_t+\tau_c)s+\left(1+\dfrac{K_mK_e}{RB}\right)}$$

Hay: $$G(s)=\frac{\omega(s)}{U(s)}=\frac{K}{T_1s^2+T_2s+1} \qquad (2\text{-}48)$$

trong đó: $T_1=\dfrac{\tau_t\tau_c RB}{K_mK_e+RB}$ ; $T_2=\dfrac{(\tau_t+\tau_c)RB}{K_mK_e+RB}$ ; $K=\dfrac{K_m}{K_mK_e+RB}$

Điện cảm L của phần ứng rất nhỏ, thường có thể bỏ qua, khi đó ta có :

$$G(s)=\frac{\omega(s)}{U(s)}=\frac{K_m}{RJs+RB+K_mK_e}=\frac{\dfrac{K_m}{RB+K_mK_e}}{\dfrac{RJ}{RB+K_mK_e}s+1}=\frac{K}{Ts+1} \qquad (2\text{-}49)$$

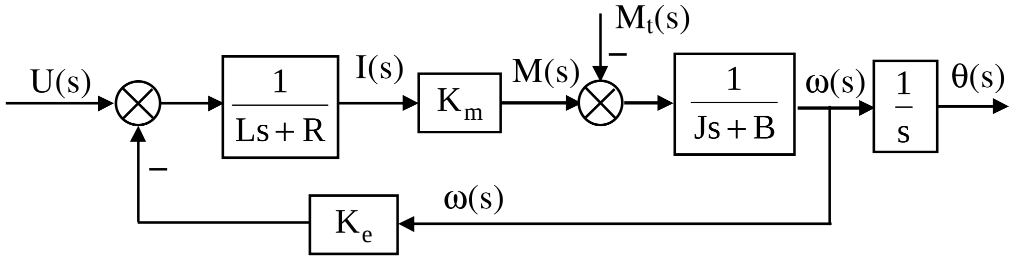
trong đó: $K=\dfrac{K_m}{RB+K_mK_e}$ **:** hệ số khuếch đại

$T=\dfrac{RJ}{RB+K_mK_e}$ **:** hằng số thời gian

***Nhận xét:***

- Tổng quát, động cơ DC điều khiển vận tốc được mô tả bằng hàm truyền bậc hai. Nếu bỏ qua điện cảm thì có thể mô tả bằng hàm truyền bậc nhất.
- Động cơ DC điều khiển bằng điện áp phần ứng tự bản thân nó là một hệ kín có tín hiệu hồi tiếp là sức điện động.

· Nếu tín hiệu ra góc quay $\theta$ (điều khiển định vị), ta có sơ đồ khối:




Hàm truyền với tín hiệu ra góc quay $\theta$ (điều khiển định vị):

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{K_m}{(Ls+R)(Js+B)}}{1+\dfrac{K_mK_e}{(Ls+R)(Js+B)}}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{K_m}{s\left[(Ls+R)(Js+B)+K_mK_e\right]} \qquad (2\text{-}50)$$

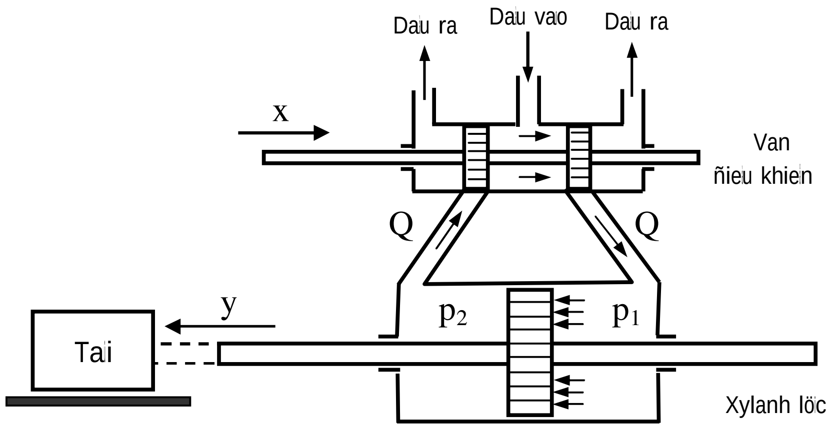
Nếu bỏ qua điện cảm của phần ứng, ta có:

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{U(s)}=\frac{K_m}{s(RJs+RB+K_mK_e)}=\frac{\dfrac{K_m}{RB+K_mK_e}}{s\left(\dfrac{RJ}{RB+K_mK_e}s+1\right)}=\frac{K}{s(Ts+1)} \qquad (2\text{-}51)$$

trong đó K và T được xác định tương tự như ở công thức (2-49).

### 2.5.4 Bộ servo thuỷ lực

Xét bộ servo thuỷ lực (còn gọi là kích thuỷ lực) gồm hai bộ phận cơ bản là van điều khiển và xylanh lực như trên hình 2.10.




***Hình 2.10.*** *Bộ servo thuỷ lực*

- Tín hiệu vào : lượng di động x của van
- Tín hiệu ra : lượng di động y của piston và tải trọng.

§ **Nguyên lý làm việc :**

Van điều khiển là loại van cân bằng, tức là ở trạng thái ổn định, các lực tác dụng lên nó luôn được cân bằng.

Nếu di động nòng van sang phải, dầu từ nguồn cấp sẽ qua cửa van vào buồng phải của xylanh, đẩy piston qua trái, dầu ở buồng trái của xylanh sẽ qua cửa van về bể dầu. Ngược lại, nếu di động nòng van sang trái thì piston sẽ qua phải.

Để điều khiển vị trí của tải trọng ta chỉ cần làm dịch chuyển nòng van bằng một lực rất nhỏ. Nói cách khác, chỉ cần tác động lên van một công suất vào rất nhỏ, ta có thể điều khiển một công suất ra rất lớn.

§ **Ứng dụng :** Bộ servo thuỷ lực được dùng rộng rãi trong các máy nâng chuyển, máy ép nhựa, hệ điều khiển bàn trượt của các máy công cụ có công suất lớn, hệ thống điều chỉnh tốc độ động cơ Diesel,...

§ **Mô tả toán học :**

Gọi Q là lưu lượng dầu chảy vào xylanh, [$m^3$/sec]

$\Delta p = p_1 - p_2$ là hiệu áp giữa hai buồng xylanh, [$N/m^2$]

x là lượng di động của van, [m]

Trong các van và xy lanh thuỷ lực, lưu lượng Q là hàm của hai biến: x và $\Delta p$. Mối quan hệ giữa Q, x và $\Delta p$ là quan hệ phi tuyến: $Q = f(x, \Delta p)$

Tuyến tính hoá phương trình phi tuyến này tại lân cận điểm làm việc ( $\overline{Q}$, $\overline{x}$, $\Delta\overline{p}$ ) bằng cách khai triển Taylor và giữ lại các số hạng tuyến tính ta có:

$$Q - \overline{Q} = +\frac{\partial f}{\partial x}(x - \overline{x}) + \frac{\partial f}{\partial \Delta p}(\Delta p - \Delta\overline{p}) \qquad (2\text{-}52)$$

Trong đó $\overline{Q} = f(\overline{x}, \Delta\overline{p})$. Các đạo hàm riêng lấy tại $x = \overline{x}$ ; $\Delta p = \Delta\overline{p}$.

Đặt:

$$K_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\overline{x};\Delta p=\Delta\overline{p}} > 0$$

$$K_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial \Delta p}\right|_{x=\overline{x};\Delta p=\Delta\overline{p}} > 0 \qquad (2\text{-}53)$$

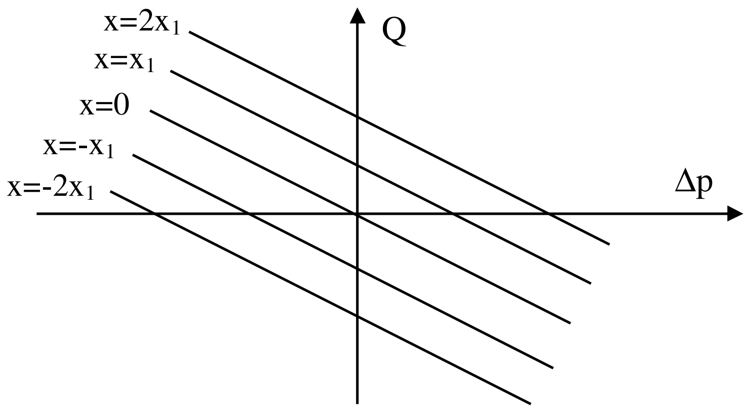
Do điều kiện làm việc bình thường tương ứng với $\overline{Q}=0$ , $\overline{x}=0$, $\Delta\overline{p}=0$

nên từ (2-52) và (2-53) ta có phương trình tuyến tính hoá:

$$Q = K_1 x - K_2 \Delta p \qquad (2\text{-}54)$$

(Dấu trừ ở vế phải thể hiện khi $\Delta p$ tăng thì Q giảm và ngược lại.)

Quan hệ tuyến tính hoá giữa Q, x và $\Delta p$ được biểu diễn trên hình (2.11). Họ đường đặc tính này bao gồm các đường thẳng song song cách đều theo thông số x. Miền gần gốc toạ độ được quan tâm nhiều nhất vì sự hoạt động của hệ thống thường xảy ra gần điểm này.




***Hình 2.11*** *Đường đặc tính tuyến tính hoá của bộ servo thuỷ lực*

Lưu lượng dầu Q chảy vào xylanh bằng tốc độ thay đổi thể tích dầu trong xylanh, tức là bằng tích của tiết diện piston A và vận tốc piston :

$$Q = A\frac{dy}{dt} \qquad (2\text{-}55)$$

Lực F tạo ra bởi piston bằng tích của tiết diện piston và hiệu áp:

$$F = A.\Delta p \qquad (2\text{-}56)$$

Kết hợp (2-56) với (2-54) và (2-55) ta được:

$$F = \frac{A}{K_2}\left(K_1 x - A\frac{dy}{dt}\right) \qquad (2\text{-}57)$$

Với một lực tối đa định trước, nếu hiệu áp đủ lớn thì diện tích piston hoặc thể tích xylanh có thể nhỏ. Như vậy để tối thiểu hoá trọng lượng của bộ servo thuỷ lực thì chúng ta phải có áp suất nguồn đủ lớn.

Giả thiết là piston lực dịch chuyển một tải bao gồm khối lượng tải và lực ma sát. Theo định luật II Newton ta có:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}=F \tag{2-58}$$

Từ (2-58) và (2-57) ta được:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}=\frac{A}{K_2}\left(K_1x-A\frac{dy}{dt}\right)$$

Suy ra phương trình vi phân của bộ servo thuỷ lực:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\left(b+\frac{A^2}{K_2}\right)\frac{dy}{dt}=\frac{AK_1}{K_2}x \tag{2-59}$$

Trong đó m là khối lượng của tải, b là hệ số ma sát nhớt.

Biến đổi Laplace hai vế, ta được:

$$ms^2Y(s)+\left(b+\frac{A^2}{K_2}\right)sY(s)=\frac{AK_1}{K_2}X(s)$$

Hàm truyền của bộ servo thuỷ lực:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s\left[\left(\frac{mK_2}{AK_1}\right)s+\frac{bK_2+A^2}{AK_1}\right]}=\frac{K}{s(Ts+1)} \tag{2-60}$$

Với: $K=\dfrac{AK_1}{bK_2+A^2}$ : hệ số khuếch đại

$T=\dfrac{mK_2}{bK_2+A^2}$ : hằng số thời gian

Trong thực tế, hằng số thời gian $T=\dfrac{mK_2}{bK_2+A^2}$ thường có giá trị rất nhỏ nên có thể bỏ qua. Hàm truyền đơn giản hoá sẽ có dạng tích phân:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{s} \tag{2-61}$$

Nếu phân tích chi tiết hơn về sự rò dầu, độ đàn hồi của dầu, lực thuỷ động..., hàm truyền sẽ có dạng:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} \tag{2-62}$$

với $T_1$, $T_2$ là các hằng số thời gian. Thực tế các hằng số thời gian phụ thuộc vào thể tích dầu trong toàn bộ hệ thống, thể tích này càng nhỏ thì các hằng số thời gian càng nhỏ.

### 2.5.5 Hệ thống chất lỏng

Khi khảo sát các hệ thống có liên quan đến dòng chảy của chất lỏng, ta cần phân biệt hai trường hợp: chảy tầng và chảy rối. Nếu chỉ số Reynold Re<2000 thì đó là dòng chảy tầng. Nếu Re>4000 thì đó là dòng chảy rối.

Hệ thống có dòng chảy tầng được mô tả bằng phương trình vi phân tuyến tính. Hệ thống có dòng chảy rối được mô tả bởi phương trình vi phân phi tuyến, hệ thống này có thể tuyến tính hoá với giả thiết các biến chỉ thay đổi nhỏ từ giá trị ổn định (tuyến tính hoá tại điểm làm việc).

Hệ chất lỏng có thuỷ trở, dung lượng và quán tính thuỷ lực. Các thông số này tương tự như điện trở, điện dung và điện cảm ở hệ thống điện.

**1) Thuỷ trở (trở kháng thuỷ lực)**

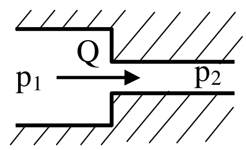
Thuỷ trở đặc trưng cho tác dụng cản trở dòng chảy của van, ống dẫn.

Công thức tổng quát để xác định thuỷ trở :

$$R = \frac{\text{sự thay đổi hiệu áp}}{\text{sự thay đổi lưu lượng}} = \frac{d(\Delta p)}{dQ} \qquad (2\text{-}63)$$

Đơn vị SI để đo thuỷ trở là: $\dfrac{Pa}{m^3/s} = \dfrac{N/m^2}{m^3/s} = N.s/m^5$

Với dòng chảy tầng (tuyến tính), hiệu áp tỉ lệ với lưu lượng:




$$\Delta p = p_1 - p_2 = R.Q \qquad (2\text{-}64)$$

Thuỷ trở ở dòng chảy tầng là một hằng số:

$$R = \frac{128\eta L}{\pi d^4} = \text{hằng số} \qquad (2\text{-}65)$$

$\eta$ _độ nhớt động lực của chất lỏng, Pa/s *hay* N.s/m$^2$

L, d _chiều dài và đường kính trong của ống dẫn, m

Với dòng chảy rối (phi tuyến), hiệu áp được tính theo công thức Fanning :

$$\Delta p = K_r Q^2 \qquad (2\text{-}66)$$

trong đó: $K_r = \dfrac{8\rho f L}{\pi^2 d^5}$ : hệ số chảy rối (2-67)

$\rho$_khối lượng riêng của chất lỏng , kg/m$^3$

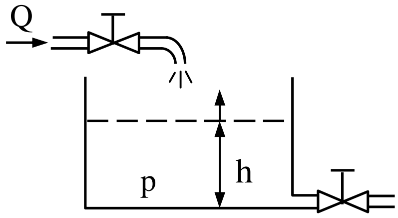
f_hệ số ma sát của ống dẫn, N.s/m

Thuỷ trở ở dòng chảy rối $R_r$ xác định bởi :

$$R_r = \frac{d(\Delta p)}{dQ} = 2K_r Q = 2\sqrt{K_r.\Delta p} \qquad (2\text{-}68)$$

Thuỷ trở cũng có thể xác định dựa vào đồ thị áp suất-lưu lượng thu được từ thực nghiệm như trên hình 2.12b) bằng cách lấy độ dốc của tiếp tuyến với đường cong tại điểm làm việc. Đối với từng loại van, do từng hãng sản xuất, sẽ có các đường cong thực nghiệm $\Delta p = f(Q)$ cụ thể.

**2) Dung lượng (dung kháng thuỷ lực)**




Dung lượng C của bồn chứa được xác định bằng sự thay đổi thể tích chất lỏng trong bồn chứa cần thiết để tạo nên sự thay đổi một đơn vị áp suất, tức là:

$$C = \frac{dV}{dp} \quad [m^3/Pa \textit{ hay } m^5/N] \qquad (2\text{-}69)$$

Áp suất trong bồn chứa phụ thuộc vào chiều cao h của cột chất lỏng, gia tốc trọng trường g, và khối lượng riêng $\rho$ của chất lỏng: $p = \rho gh$

$$\Rightarrow \quad dp = \rho g dh \qquad (2\text{-}70)$$

Sự thay đổi thể tích chất lỏng trong bồn:

$$dV = A.dh = Q.dt \qquad (2\text{-}71)$$

với A_tiết diện ngang của bồn chứa,[$m^2$]

Từ (2-69), (2-70), (2-71) ta có: $C = \frac{dV}{dp} = \frac{Adh}{\rho g dh} = \frac{A}{\rho g}$ (2-72)

Từ (2-69) và (2-71) ta có: $dV = C.dp = Q.dt$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{C}\int Q dt \quad \text{với} \quad C = \frac{A}{\rho g} \qquad (2\text{-}73)$$

**3) Quán tính thuỷ lực**

Lực tác dụng lên tiết diện $A_0$ của ống dẫn bằng tiết diện nhân với hiệu áp :

$$F = A_0.\Delta p$$

Theo định luật II Newton ta có: $F = A_0.\Delta p = m\frac{dv}{dt}$ (2-74)

v-tốc độ dòng chảy[m/s] ; $A_0$-tiết diện ống dẫn [$m^2$]; m-khối lượng chất lỏng [kg] ; $m = \rho L A_0$ $\rho$-khối lượng riêng của chất lỏng[$kg/m^3$]; L-chiều dài ống[m]

Do: $dQ = A_0\frac{dv}{dt}$

Nên: $\Delta p = \frac{\rho L}{A_0}.\frac{dQ}{dt}$ (2-75)

Đại lượng $J = \frac{\Delta p}{dQ/dt} = \frac{\rho L}{A_0}$ [ $Pa.s^2/m^3$] gọi là *quán tính thuỷ lực*. Nó đặc trưng cho hiệu áp cần thiết để làm tăng một đơn vị lưu lượng trong 1 giây.

Dùng khái niệm quán tính thuỷ lực J ta có thể biểu diễn hiệu áp cần thiết để tăng tốc dòng chất lỏng trong ống dẫn như sau:

$$\Delta p = J\frac{dQ}{dt} \quad \text{với} \quad J = \frac{\rho L}{A_0} \qquad (2\text{-}76)$$

Kết hợp cả ba yếu tố thuỷ trở, dung lượng, quán tính thuỷ lực ta có phương trình tổng quát của hệ thống có dòng chảy tầng :

$$J\frac{dQ}{dt} + RQ + \frac{1}{C}\int Q dt = \Delta p \qquad (2\text{-}77)$$

**Ví dụ 2.10.** Xét hệ thống một bồn chứa nước trên hình 2.12a), các biến được định nghĩa như sau:

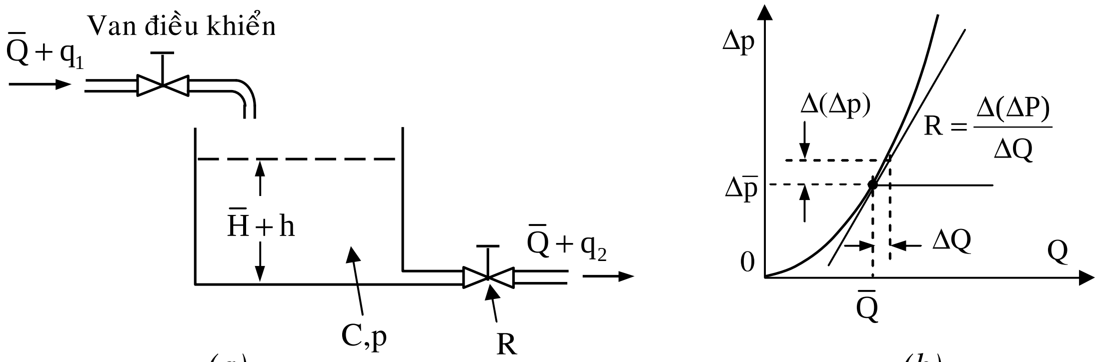
$\bar{Q}$ : lưu lượng ổn định ban đầu (hằng số), $m^3/s$

$q_1$ : thay đổi nhỏ của lưu lượng vào so với giá trị ổn định, $m^3/s$

$q_2$ : thay đổi nhỏ của lưu lượng ra so với giá trị ổn định, $m^3/s$

$\bar{H}$ : mức nước ổn định (hằng số), m

h : thay đổi nhỏ của mức nước so với giá trị ổn định, m.




***Hình 2.12**. a) Hệ thống mức chất lỏng b) Đường cong áp suất - lưu lượng*

Giả thiết dòng chảy là chảy tầng và vì vậy hệ thống là tuyến tính. Nếu chảy rối, hệ thống cũng có thể tuyến tính hoá với sự thay đổi của các biến là nhỏ.

Lượng thay đổi thể tích chất lỏng trong bồn:

$$dV = Adh = (q_1 - q_2)dt \tag{2-78}$$

Bỏ qua quán tính thuỷ lực. Với dòng chảy tầng ta có:

$$q_2 = \frac{\Delta p}{R} = \frac{p}{R} = \frac{\rho g h}{R} \tag{2-79}$$

Thay (2-79) vào (2-78) ta được:

$$A\frac{dh}{dt} = q_1 + \frac{\rho g h}{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad R\left(\frac{A}{\rho g}\right)\frac{dh}{dt} + h = \frac{R}{\rho g}q_1$$

$$\Leftrightarrow \quad RC\frac{dh}{dt} + h = \frac{R}{\rho g}q_1 \tag{2-80}$$

Biến đổi Laplace hai vế với giả thiết điều kiện đầu bằng 0, ta được:

$$\left(RCs + 1\right)H(s) = \frac{R}{\rho g}Q_1(s) \tag{2-81}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\tau s + 1\right)H(s) = KQ_1(s) \tag{2-82}$$

Với $\tau = RC = \dfrac{RA}{\rho g}$ : hằng số thời gian

$K = \dfrac{R}{\rho g}$ : hệ số khuếch đại

Xét $q_1$ là tín hiệu vào, h là tín hiệu ra, ta có hàm truyền bậc nhất:

$$\frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{R/\rho g}{RCs+1} = \frac{K}{\tau s+1} \qquad (2\text{-}83)$$

Xét $q_1$ là tín hiệu vào, $q_2$ là tín hiệu ra, ta có hàm truyền bậc nhất:

$$\frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{\tau s+1} \quad \text{vì} \quad Q_2(s) = \frac{\rho g}{R} H(s) \qquad (2\text{-}84)$$

**Ví dụ 2.11.**

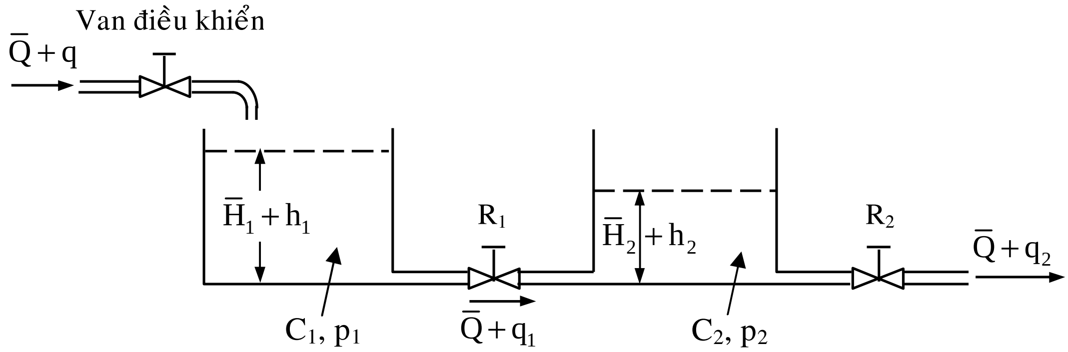
Xét hệ thống trên hình 2.13. Trong hệ có hai bồn chứa nối thông với nhau bằng một đoạn ống ngắn. Đây là dạng hệ thống bậc hai có tác động tương hỗ, nghĩa là hệ có hai phần tử tích năng trong đó phần tử thứ hai có tác động vào phần tử thứ nhất. Giả thiết các biến của hệ chỉ thay đổi nhỏ tính từ giá trị ổn định (tuyến tính hoá) và bỏ qua quán tính thuỷ lực. Ta có các phương trình sau:

$$p_1 - p_2 = \rho g\left(h_1 - h_2\right) = R_1 q_1 \qquad (2\text{-}85)$$

$$C_1 \rho g \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \qquad (2\text{-}86)$$

$$p_2 = \rho g h_2 = R_2 q_2 \qquad (2\text{-}87)$$

$$C_2 \rho g \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \qquad (2\text{-}88)$$




***Hình 2.13.*** *Hệ thống mức chất lỏng có sự tác động tương hỗ*

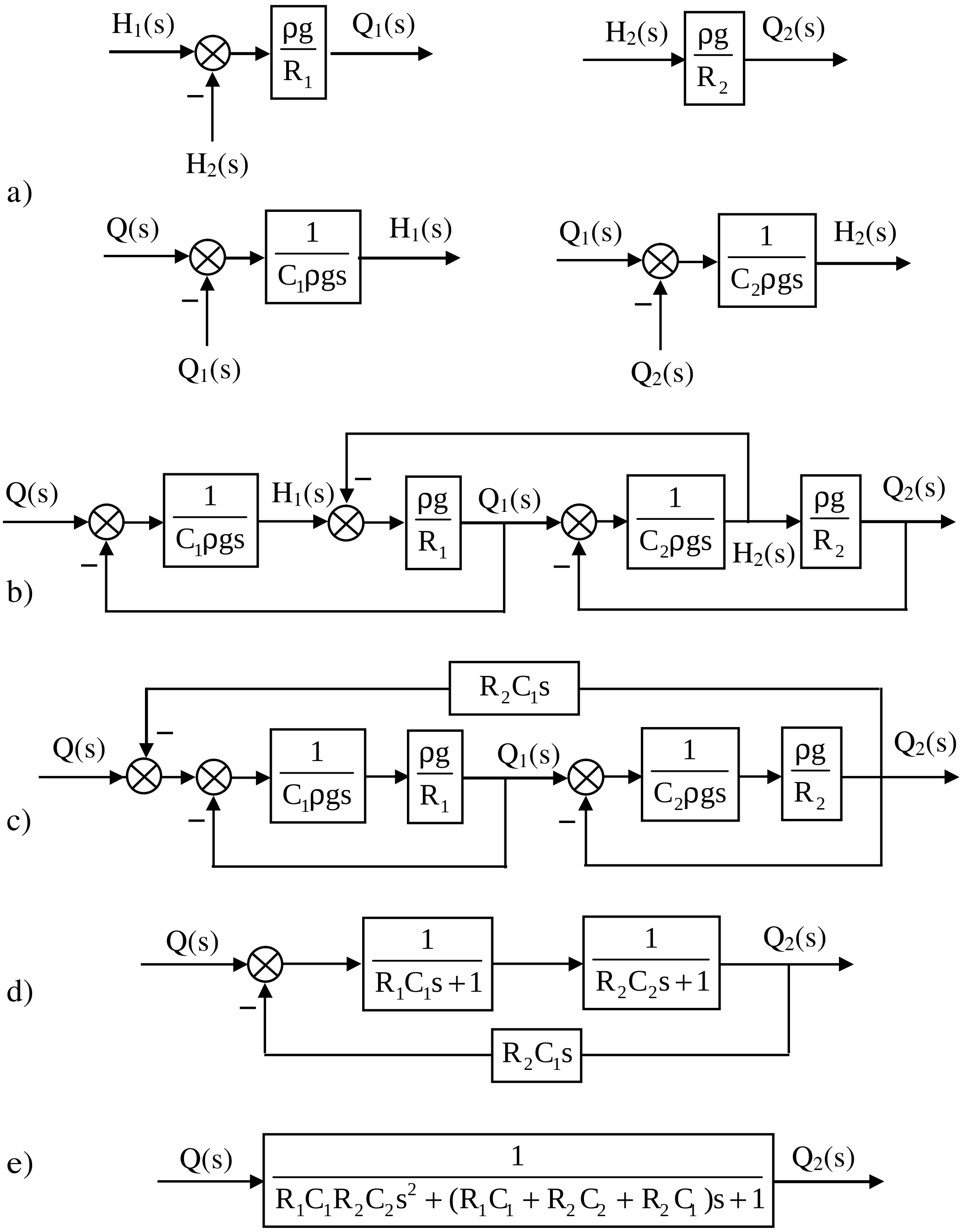
Từ các phương trình (2-85) đến (2-88) ta lập các sơ đồ khối ở hình 2.14a

Bằng việc nối các tín hiệu thích hợp, ta có sơ đồ khối của toàn bộ hệ thống như hình 2.14b.

Bằng các phép biến đổi sơ đồ khối, ta có sơ đồ khối đơn giản như hình 2.14e

Nếu q là tín hiệu vào, $q_2$ là tín hiệu ra, ta có hàm truyền của hệ là:

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1}$$




***Hình 2.14.*** *a) Sơ đồ khối các phần tử của hệ thống trên hình 2.13*

*b) Sơ đồ khối toàn bộ hệ thống*

*c) ® e) Các sơ đồ khối rút gọn.*

### 2.5.6 Phần tử nhiệt

Phần tử nhiệt có hai thông số đặc trưng là nhiệt trở và nhiệt dung.

**1) Nhiệt trở**

Nhiệt trở là đặc tính ngăn cản sự truyền nhiệt của môi trường (vật thể hay lưu chất). Nhiệt trở R khi truyền nhiệt giữa hai môi trường được định nghĩa :

$$R = \frac{\text{Sự thay đổi hiệu nhiệt độ ; [°K]}}{\text{Sự thay đổi tốc độ truyền nhiệt; [W]}}$$

Cách xác định nhiệt trở phụ thuộc vào phương pháp truyền nhiệt. Có ba phương pháp truyền nhiệt là: dẫn nhiệt, đối lưu nhiệt và bức xạ nhiệt.

- Truyền nhiệt bằng dẫn nhiệt hoặc đối lưu :

$$q = K.\Delta\theta \qquad (2\text{-}89)$$

trong đó:

q _ tốc độ truyền nhiệt (thông lượng nhiệt), W

$\Delta\theta$ _ hiệu nhiệt độ, °K

K_ hệ số , W/°K

Hệ số K được cho bởi:

$$K = \frac{kA}{\Delta X} \quad \text{nếu dẫn nhiệt}$$

$$K = HA \quad \text{nếu đối lưu nhiệt}$$

với k : hệ số dẫn nhiệt của vật dẫn, W/(m. °K)

A : diện tích bề mặt truyền nhiệt, $m^2$

$\Delta X$ : độ dày vật dẫn nhiệt, m

H : hệ số đối lưu nhiệt giữa hai môi trường, W/($m^2$.°K)

- Nhiệt trở dẫn nhiệt và đối lưu nhiệt:

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{K} \quad [°K/W] \qquad (2\text{-}90)$$

Vì k và H hầu như không đổi nên nhiệt trở của hai loại này là hằng số.

- Truyền nhiệt bằng bức xạ nhiệt giữa hai vật thể:

$$q = K_r(\theta_1^4 - \theta_2^4) \qquad (2\text{-}91)$$

trong đó:

q _ tốc độ truyền nhiệt (thông lượng nhiệt), W

$K_r$ _hệ số phụ thuộc vào độ phát xạ, kích thước, cấu trúc bề mặt phát xạ và kích thước, cấu trúc bề mặt nhận nhiệt.

$\theta_1$ _ nhiệt độ tuyệt đối của bộ phát , °K

$\theta_2$ _ nhiệt độ tuyệt đối của phần thu, °K

Vì hằng số Kr rất nhỏ nên truyền nhiệt bức xạ là đáng kể khi nhiệt độ của bộ phát lớn hơn nhiều so với phần thu, tức là $\theta_1 >> \theta_2$. Trường hợp này phương trình (2-91) có thể viết lại là:

$$q = K_r\overline{\theta}^4$$

với $\overline{\theta} = \sqrt[4]{\theta_1^4 - \theta_2^4}$ là độ chênh lệch nhiệt hiệu quả của bộ phát và phần thu.

$\Rightarrow$ Nhiệt trở bức xạ nhiệt :

$$R = \frac{d\overline{\theta}}{dq} = \frac{1}{4K_r\overline{\theta}^3} \tag{2-92}$$

Nhiệt trở bức xạ có thể xem là hằng số trong một dải điều kiện hoạt động nhỏ quanh điểm làm việc (tuyến tính hoá).

**Nhiệt dung:**

Nhiệt dung C là nhiệt lượng cần thiết để làm thay đổi một đơn vị nhiệt độ.

$$C = mc$$

Với m _ khối lượng của vật hay lưu chất đang xét, kg

c _ nhiệt dung riêng của vật hay lưu chất đang xét, J/(kg. °K)

C _nhiệt dung của hệ thống nhiệt, J/ °K

Gọi $q_1$ là dòng nhiệt chảy vào và $q_2$ là dòng nhiệt chảy ra, ($q_1$-$q_2$) được tích tụ lại trong phần tử dưới dạng nội năng. Ta có phương trình cân bằng nhiệt:

$$q_1 - q_2 = mc\frac{d\theta}{dt} = C\frac{d\theta}{dt} \tag{2-93}$$

**Ví dụ 2.12.** Xét một buồng trao đổi nhiệt như mô tả trên hình 2.15. Giả sử rằng buồng nhiệt được cách ly để loại bỏ sự thất thoát nhiệt ra môi trường chung quanh, không có nhiệt lưu trữ trong bộ phận cách ly và chất lỏng trong buồng được trộn hoàn hảo tức là có nhiệt độ đồng nhất. Vì vậy chỉ cần dùng một biến nhiệt độ duy nhất để mô tả nhiệt độ của chất lỏng trong buồng và chất lỏng chảy ra.

Gọi: $\overline{\Theta}_i$ _ nhiệt độ của chất lỏng vào ở trạng thái xác lập, °K

$\overline{\Theta}_o$ _ nhiệt độ của chất lỏng ra ở trạng thái xác lập, °K

G _ lưu tốc khối lượng của chất lỏng ở xác lập, kg/s

m _khối lượng chất lỏng trong buồng, kg

c _nhiệt dung riêng của chất lỏng, J/kg. °K

C _nhiệt dung, J/°K

R _nhiệt trở, °K/W

$\overline{H}$ _ tốc độ gia nhiệt ở xác lập, W

Giả thiết nhiệt độ của chất lỏng vào được giữ không đổi ở $\overline{\Theta}_i$ và tốc độ gia nhiệt bởi điện trở nung thay đổi đột ngột từ $\overline{H}$ đến $\overline{H}+h_i$, trong đó $h_i$ là lượng thay đổi nhỏ của tốc độ gia nhiệt. Tốc độ truyền nhiệt trong chất lỏng lúc đó thay đổi đột ngột từ $\overline{H}$ đến $\overline{H}+h_o$. Nhiệt độ của chất lỏng ra sẽ thay đổi từ $\overline{\Theta}_o$ đến $\overline{\Theta}_o+\theta$.

Trong trường hợp này ta có :

$$h_o = Gc\theta \quad ; \quad C = mc \quad ; \quad R = \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{Gc}$$

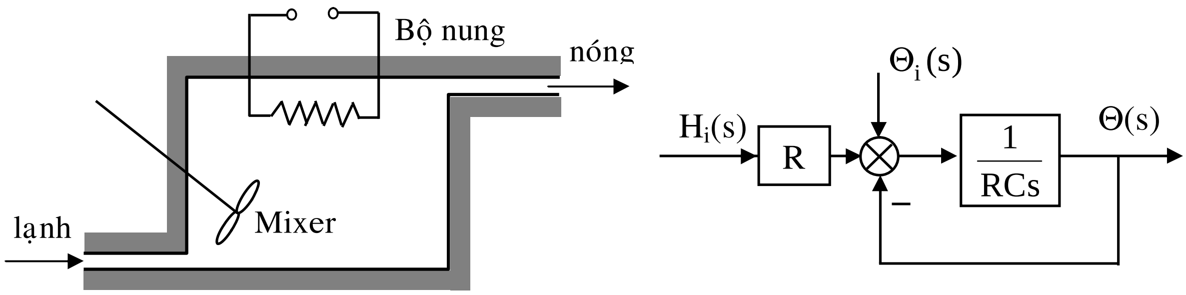
Phương trình vi phân biểu diễn sự cân bằng nhiệt theo (2-93) :

$$C\frac{d\theta}{dt} = h_i - h_o \quad ; \qquad \text{hay} \qquad RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i$$

$\Rightarrow$ Hàm truyền giữa $\theta$ và $h_i$ là:

$$\frac{\Theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs+1}$$

với: $\Theta(s) = L\left[\theta(t)\right]$ và $H_i(s) = L\left[h_i(t)\right]$




(a) (b)

***Hình 2.15.*** *Sơ đồ nguyên lý và sơ đồ khối của buồng trao đổi nhiệt*

Trong thực tế nhiệt độ của chất lỏng chảy vào có thể dao động và tác động như một nhiễu phụ tải. (Nếu muốn nhiệt độ chất lỏng ra không đổi thì phải lắp đặt một bộ điều khiển tốc độ gia nhiệt để bù vào sự dao động của nhiệt độ chất lỏng vào). Nếu nhiệt độ của chất lỏng vào thay đổi đột ngột từ $\overline{\Theta}_i$ đến $\overline{\Theta}_i + \theta_i$ trong khi tốc độ gia nhiệt $\overline{H}$ và tốc độ dòng chảy G được giữ không đổi. Khi đó tốc độ truyền nhiệt sẽ thay đổi từ $\overline{H}$ đến $\overline{H} + h_o$ và nhiệt độ của chất lỏng ra sẽ thay đổi từ $\overline{\Theta}_o$ đến $\overline{\Theta}_o + \theta_i$. Phương trình cân bằng nhiệt trong trường hợp này là:

$$C\frac{d\theta}{dt} = h_i - h_o \quad \text{Û} \quad C\frac{d\theta}{dt} = Gc\theta_i - h_o \quad \text{Û} \qquad RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i$$

$\Rightarrow$ Hàm truyền giữa $\theta$ và $\theta_i$ là:

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{RCs+1} \qquad (2\text{-}94)$$

trong đó: $\Theta(s) = L\left[\theta(t)\right]$ và $\Theta_i(s) = L\left[\theta_i(t)\right]$

Nếu hệ thống nhận cả hai tác động vào là $h_i$ và $\theta_i$ trong khi tốc độ gia nhiệt $\overline{H}$ và tốc độ dòng chảy G được giữ không đổi thì sự thay đổi $\theta$ của nhiệt độ chất lỏng ra có thể biểu diễn bằng phương trình vi phân:

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i + Rh_i \qquad (2\text{-}95)$$

Sơ đồ khối của hệ thống nhiệt cho trường hợp này được biểu diễn trên hình 2.15b .

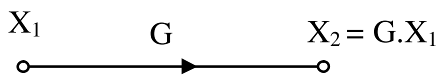
## 2.6 Graph tín hiệu

Bên cạnh phương pháp biểu diễn hệ thống điều khiển bằng sơ đồ khối, người ta còn dùng graph tín hiệu (sơ đồ dòng tín hiệu) do S.J. Mason đưa ra năm 1953. Phương pháp này có ưu điểm là đưa ra được công thức tổng quát để tính hàm truyền của hệ thống có cấu trúc phức tạp mà không cần phải biến đổi sơ đồ.

### 1) Định nghĩa

Graph tín hiệu là một sơ đồ gồm các nhánh và nút.

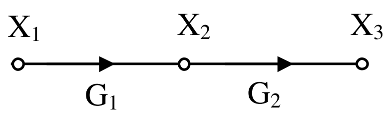
- **Nút:** Mỗi nút là một điểm biểu diễn một biến hay một tín hiệu trong hệ thống.
- **Nhánh:** Mỗi nhánh là một đường nối trực tiếp hai nút, trên mỗi nhánh có ghi mũi tên chỉ chiều của tín hiệu và ghi hàm truyền cho biết mối quan hệ giữa tín hiệu ở hai nút.




- **Nút nguồn:** là nút chỉ có các nhánh hướng ra.
- **Nút đích:** là nút chỉ có các nhánh hướng vào.
- **Nút hỗn hợp:** là nút có cả các nhánh ra và các nhánh vào.
- **Đường tiến:** là đường gồm các nhánh liên tiếp có cùng hướng tín hiệu đi từ nút nguồn đến nút đích và chỉ qua mỗi nút một lần. Hàm truyền của một đường tiến bằng tích các hàm truyền của các nhánh trên đường tiến đó.
- **Vòng kín:** là đường khép kín bao gồm các nhánh liên tiếp có cùng một hướng tín hiệu và chỉ đi qua mỗi nút một lần. Hàm truyền của một vòng kín bằng tích các hàm truyền của các nhánh trên vòng kín đó.

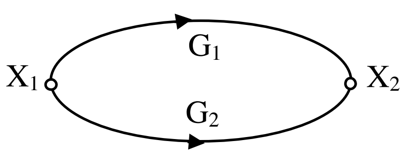
### 2) Đại số graph tín hiệu

- Các nhánh nối tiếp:

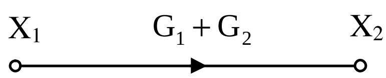



Û

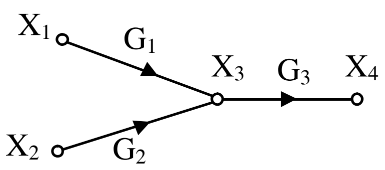

- Các nhánh song song:



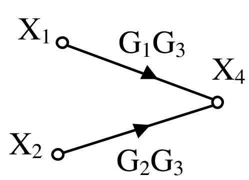

Û




- Nút hỗn hợp:

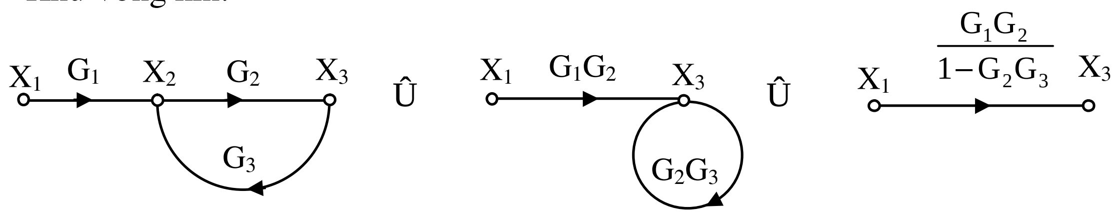



Û



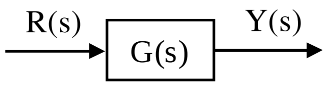
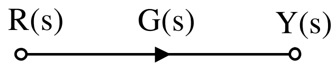
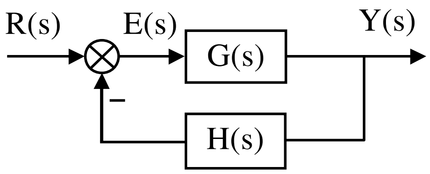
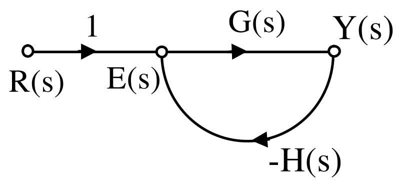
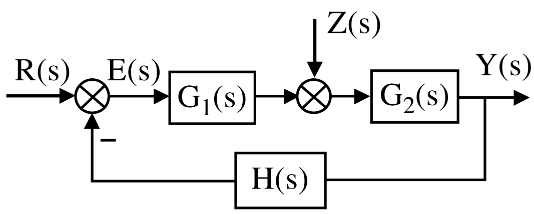
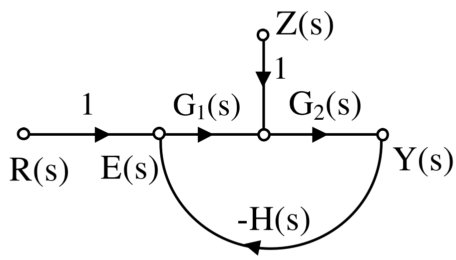
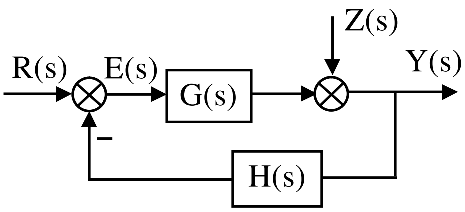
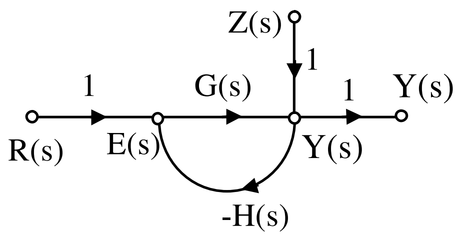
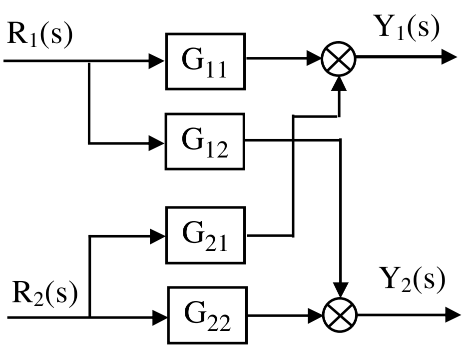
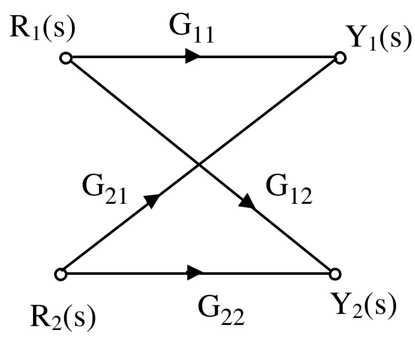

$$X_3 = X_1G_1 + X_2G_2 \;; \qquad X_4 = X_3G_3 = X_1G_1G_3 + X_2G_2G_3$$

- Khử vòng kín:




$$\begin{cases} X_3 = X_2 G_2 \\ X_2 = X_1 G_1 + X_3 G_3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad X_3 = X_1 G_1 G_2 + X_3 G_2 G_3 \quad \Leftrightarrow \quad X_3 = \frac{G_1 G_2}{1 - G_2 G_3} X_1$$

- Sự tương quan giữa sơ đồ khối và graph tín hiệu :

| | |
|---|---|
|   |   |
|   |   |
|   |   |
|   |   |
|   |   |

### 3) Công thức Mason

Hàm truyền tương đương của hệ thống tự động biểu diễn bằng graph tín hiệu có thể tính theo công thức:

$$G = \frac{1}{\Delta}\sum_k P_k \Delta_k$$

trong đó : $P_k$ : Hàm truyền của đường tiến thứ k

$\Delta$ : Định thức của graph tín hiệu

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,m} L_i L_j L_m + \dots$$

$\sum L_i$ : Tổng các hàm truyền của các vòng kín có trong sơ đồ graph.

$\sum L_i L_j$ : Tổng các tích hàm truyền của hai vòng kín không dính nhau.

(không dính = không có nút nào chung; dính = có ít nhất một nút chung)

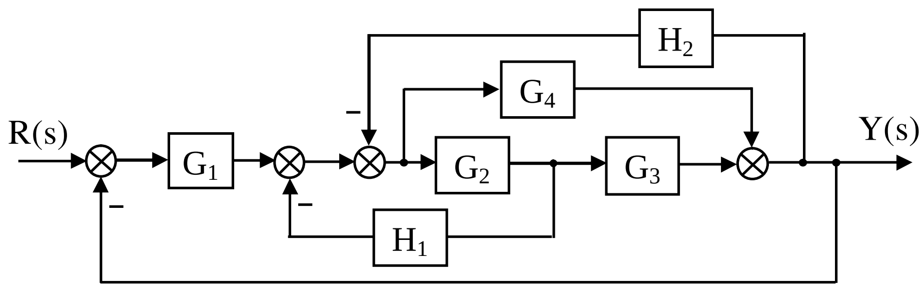
$\sum L_i L_j L_m$ : Tổng các tích hàm truyền của ba vòng kín không dính nhau.

$\Delta_k$ : Định thức con thứ k, suy ra từ $\Delta$ bằng cách bỏ đi các vòng kín có dính với đường tiến thứ k.

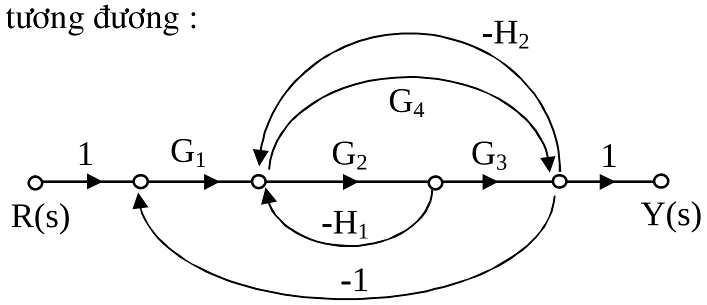
Nếu hệ thống cho ở dạng sơ đồ khối, muốn áp dụng được công thức Mason, trước hết ta phải chuyển sơ đồ khối thành sơ đồ graph. Khi chuyển từ sơ đồ khối sang graph tín hiệu cần lưu ý:

- *Có thể gộp hai bộ tổng (hoặc hai điểm rẽ) liền nhau thành một nút.*
- *Có thể gộp một bộ tổng và một điểm rẽ nhánh liền sau nó thành một nút.*
- *<u>Không thể</u> gộp một điểm rẽ và một bộ tổng liền sau nó thành một nút.*

**Ví dụ 2.13.** Tìm hàm truyền của hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ:




***Giải.*** Graph tín hiệu tương đương :




Hệ có hai đường tiến: $P_1 = G_1G_2G_3$ ; $P_2 = G_1G_4$

Hệ có năm vòng kín:

$$L_1=-G_1G_2G_3\ ;\ \ L_2=-G_1G_4\ ;\ \ L_3=-G_2H_1\ ;\ \ L_4=-G_2G_3H_2\ ;\ \ L_5=-G_4H_2$$

***Nhận xét:***

*- Các vòng kín và đường tiến có chung ít nhất một nhánh $G_i$ thì sẽ có ít nhất hai nút chung nên chúng dính nhau. Trường hợp này chỉ cần kiểm tra nhanh hàm truyền các vòng kín và đường tiến tương ứng, không nhất thiết phải kiểm tra trên graph.*

*- Các vòng kín và đường tiến không có nhánh $G_i$ nào chung vẫn có thể dính nhau ở một nút hoặc không dính, khi đó cần kiểm tra cụ thể trên graph.*

Hệ thống cho ở ví dụ này có 5 vòng kín đều dính nhau nên:

$$\Delta=1-(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5)$$

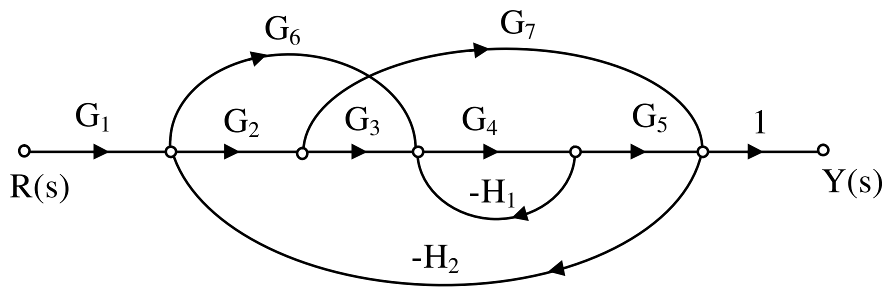
Cả 5 vòng kín đều dính với các đường tiến $P_1$ và $P_2$ nên:

$$\Delta_1=1\ ;\ \Delta_2=1$$

Hàm truyền của hệ thống tính theo công thức Mason:

$$G(s)=\frac{1}{\Delta}\left(P_1\Delta_1+P_2\Delta_2\right)=\frac{G_1G_2G_3+G_1G_4}{1+G_1G_2G_3+G_1G_4+G_2H_1+G_2G_3H_2+G_4H_2}$$

**Ví dụ 2.14.** Tìm hàm truyền của hệ thống mô tả bởi sơ đồ graph sau đây:




***Giải.***

Hàm truyền của các đường tiến:

$$P_1=G_1G_2G_3G_4G_5\ ;\quad P_2=G_1G_6G_4G_5\ ;\quad P_3=G_1G_2G_7$$

Hàm truyền của các vòng kín :

$$L_1=-G_4H_1;\ \ L_2=-G_2G_7H_2\ ;\ \ L_3=-G_6G_4G_5H_2;\ \ L_4=-G_2G_3G_4G_5H_2$$

Vòng một không dính vào vòng hai nên:

$$\Delta=1-(L_1+L_2+L_3+L_4)+L_1L_2$$

Cả bốn vòng kín đều dính với $P_1$ và $P_2$. Như vậy, bỏ đi $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$ và $L_1L_2$ trong $\Delta$, ta được:

$$\Delta_1=\Delta_2=1$$

Vòng $L_1$ không dính với $P_3$ nên: $\Delta_3=1-L_1$

Hàm truyền của hệ thống tính theo công thức Mason:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{\Delta}(P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+P_3\Delta_3)$$

$$=\frac{G_1G_2G_3G_4G_5+G_1G_6G_4G_5+G_1G_2G_7(1+G_4H_1)}{1+G_4H_1+G_2G_7H_2+G_6G_5G_4H_2+G_2G_3G_4G_5H_2+G_4H_1G_2G_7H_2}$$

## 2.7 Mô hình phương trình trạng thái

### 2.7.1 Khái quát

Dùng hàm truyền để mô tả và nghiên cứu hệ thống thuận lợi hơn dùng phương trình vi phân nhưng vẫn còn một số hạn chế:

- Chỉ áp dụng được với điều kiện ban đầu bằng 0.
- Chỉ mô tả được quan hệ tuyến tính một vào, một ra (hệ SISO).
- Chỉ áp dụng được cho hệ thống tuyến tính bất biến, không áp dụng được cho hệ phi tuyến hay hệ có thông số biến đổi theo thời gian.

Để giải quyết các vấn đề trên, người ta dùng phương pháp không gian trạng thái. Phương pháp này sử dụng kiến thức về đại số ma trận thay cho hàm biến phức và khảo sát được không chỉ riêng quan hệ giữa các tín hiệu vào, ra mà cả sự thay đổi các biến số khác bên trong hệ thống và ảnh hưởng của các giá trị ban đầu của chúng tới tín hiệu ra. Ví dụ, bên cạnh tín hiệu ra của động cơ là vận tốc chúng ta cũng muốn quan sát cả gia tốc, dòng điện, tổn hao năng lượng,...

Trạng thái của hệ thống là tập hợp nhỏ nhất các biến (gọi là ***biến trạng thái***) mà nếu biết giá trị các biến này tại thời điểm $t=t_0$ và biết các tín hiệu vào ở $t \geq t_0$, ta hoàn toàn có thể xác định được đáp ứng của hệ thống tại mọi thời điểm $t \geq t_0$. Với hệ thống tuyến tính bất biến, thời điểm đầu thường được chọn là $t_0=0$.

Biến trạng thái không nhất thiết phải là những thông số đo được (biến vật lý). Các biến không đại diện cho các đại lượng vật lý (chỉ là biến toán học) cũng có thể chọn làm biến trạng thái. Một hệ thống có thể mô tả bằng các mô hình trạng thái khác nhau, tuỳ theo cách chọn biến trạng thái. Để mô tả hệ thống bậc *n* cần dùng *n* biến trạng thái, hợp thành véctơ cột gọi là ***véctơ trạng thái***, ký hiệu là:

$$x = \left[x_1 \;\; x_2 \;\; \dots x_n\right]^T \qquad (2\text{-}96)$$

Dùng biến trạng thái ta có thể chuyển phương trình vi phân bậc *n* mô tả hệ thống thành hệ *n* phương trình vi phân bậc nhất viết dưới dạng ma trận như sau :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t) & \text{: phương trình trạng thái} \qquad (2\text{-}97) \\ y(t) = Cx(t) + Dr(t) & \text{: phương trình đầu ra} \qquad (2\text{-}98) \end{cases}$$

trong đó: $x(t)$ là véctơ trạng thái

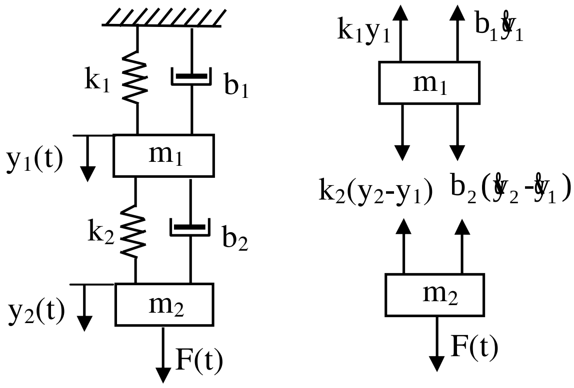
$r(t)$ là tín hiệu vào, $y(t)$ là tín hiệu ra của hệ.

- Với hệ tuyến tính bất biến MIMO thì A, B, C, D là các ma trận hệ số hằng.
- Với hệ tuyến tính bất biến SISO thì A là ma trận, B là vectơ cột, C là vectơ hàng, D là một hằng số.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad C = [\, c_1 \;\; c_2 \;\; \dots c_n \,]\,; \quad D = d_1$$

- Nếu hệ tuyến tính bất biến SISO có hàm truyền với bậc tử số nhỏ hơn bậc mẫu số (gọi là hệ hợp thức chặt) thì D = 0.

**Ví dụ 2.15.** Viết phương trình trạng thái mô tả hệ thống trên hình 2.16.




*Hình 2.16*

Giải phóng các liên kết và viết các phương trình cân bằng lực, ta được:

$$F - b_2\left[\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right] - k_2(y_2 - y_1) = m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}$$

$$b_2\left[\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right] + k_2(y_2 - y_1) - b_1\frac{dy_1}{dt} - k_1y_1 = m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}$$

Đặt các biến trạng thái :

$$x_1 = y_1;\ x_2 = y_2\ ;\ x_3 = \frac{dy_1}{dt}\ ;\quad x_4 = \frac{dy_2}{dt}$$

Ta viết được các phương trình trạng thái :

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{1}{m_1}(k_1 + k_2)x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{b_1 + b_2}{m_1}x_3 + \frac{b_2}{m_1}x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{b_2}{m_2}x_3 - \frac{b_2}{m_2}x_4 + \frac{F(t)}{m_2}$$

Hay:

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t)\\ y(t) = Cx(t)\end{cases}$$

Với: $$x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix};\quad \dot{x} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix};\quad A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{b_1+b_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1}\\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2}\end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{m_2}\end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad y(t) = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix};\quad r(t)=F(t)$$

### 2.7.2 Lập phương trình trạng thái từ phương trình vi phân

#### 1) Phương trình vi phân không chứa đạo hàm tín hiệu vào

Xét hệ thống tuyến tính SISO có tín hiệu vào r(t), tín hiệu ra y(t), mô tả bởi phương trình vi phân:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_0 r(t) \tag{2-99}$$

Để ý là ở vế trái có hệ số $a_n = 1$. Nếu $a_n \neq 1$ ta có thể chia hai vế cho $a_n$ để đưa về dạng trên.

Đặt n biến trạng thái theo qui tắc: ***Biến sau bằng đạo hàm của biến trước, biến thứ nhất bằng tín hiệu ra***.

$$x_1 = y(t),\ x_2 = \dot{x}_1, \ldots, x_n = \dot{x}_{n-1} \tag{2-100}$$

$$\Rightarrow \qquad x_2 = \dot{y}(t),\ x_3 = \ddot{y}(t)\ , \ldots,\ x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}},\quad \dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Thay các biến trạng thái vào phương trình vi phân, ta được :

$$\dot{x}_n + a_{n-1}x_n + \ldots + a_1 x_2 + a_0 x_1 = b_0 r \tag{2-101}$$

Kết hợp (2-100) và (2-101) ta được:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots - a_{n-1}x_n + b_0 r \end{cases} \tag{2-102}$$

Viết dưới dạng ma trận ta được:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} r$$

Đáp ứng của hệ thống :

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

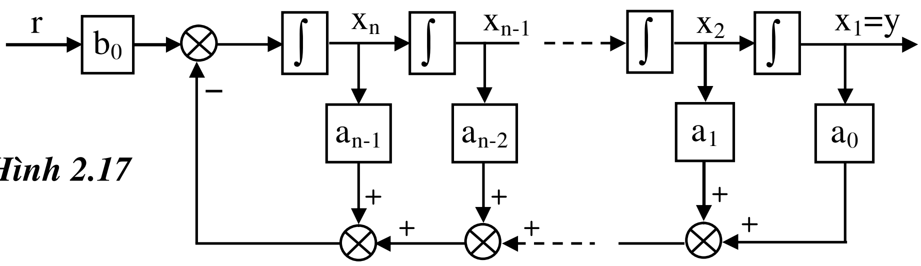
Vậy hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống là:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Br \\ y = Cx + Dr \end{cases} \tag{2-103}$$

$$\text{Trong đó :}\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix};\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\dots&-a_{n-1}\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\b_0\end{bmatrix};$$

$$C=[1\ \ 0\ \dots\ 0\ \ 0]\quad;\quad D=0.$$

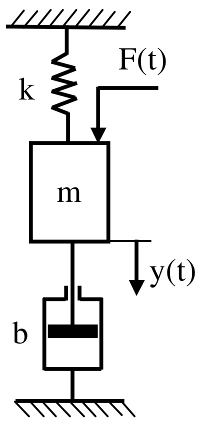
Sơ đồ khối của hệ thống có thể biểu diễn như hình vẽ:




***Hình 2.17***

**Ví dụ 2.16.** Xét hệ thống cơ khí trên hình 2.18. Giả thiết hệ thống là tuyến tính. Lực tác động F(t) từ bên ngoài là tín hiệu vào và khoảng dịch chuyển y(t) của khối lượng m là tín hiệu ra. y(t) được đo từ vị trí cân bằng.

Theo định luật II Newton ta có :




***Hình 2.18***

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum F_i=F(t)-b\frac{dy}{dt}-k.y(t)$$

$$\Leftrightarrow\qquad m\ddot{y}+b\dot{y}+ky=F$$

Đặt các biến trạng thái :

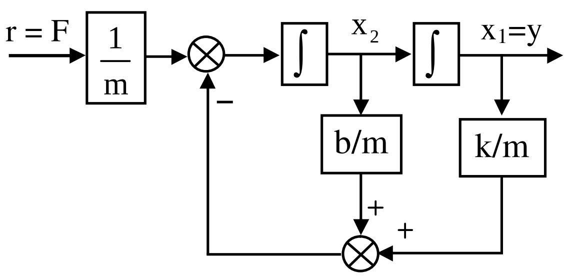
$$x_1=y,\ \ x_2=\dot{x}_1=\dot{y}$$

$$\Rightarrow\qquad \dot{x}_2=\ddot{y}$$

Thay vào phương trình vi phân, ta được :

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\dfrac{k}{m}x_1-\dfrac{b}{m}x_2+\dfrac{1}{m}F\end{cases}$$

Phương trình đầu ra : $\qquad y=x_1$




Viết lại dưới dạng ma trận :

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-\dfrac{k}{m}&-\dfrac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{m}\end{bmatrix}F\\[2ex] y=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

**2) Phương trình vi phân có chứa đạo hàm tín hiệu vào**

Xét hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân :

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0 y(t)=b_n\frac{d^n r}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}}+\ldots+b_0 r(t) \qquad (2\text{-}104)$$

Với tín hiệu vào r(t), tín hiệu ra y(t). Các hệ số $b_n$, $b_{n-1}$,...,$b_0$ có thể bằng 0.

Đặt n biến trạng thái như sau:

- Biến thứ nhất : Nếu bậc vế phải < n (tức $b_n$=0), đặt $\mathbf{x_1 = y}$

  Nếu bậc vế phải = n (tức $b_n$≠0), đặt $\mathbf{x_1 = y - b_0 r}$
- Biến thứ i (i=2,3,...,n): $x_i = \dot{x}_{i-1} - \beta_{i-1} r$

và đặt: $\dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \ldots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + \beta_n r$

Với cách đặt biến trạng thái như trên, ta sẽ xác định được các hệ số:

$$\begin{cases}\beta_0 = b_n\\ \beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0\\ \beta_2 = b_{n-2} - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-2}\beta_0\\ \vdots\\ \beta_{n-1} = b_1 - a_{n-1}\beta_{n-2} - a_{n-2}\beta_{n-3} - \ldots - a_2\beta_1 - a_1\beta_0\\ \beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - a_{n-2}\beta_{n-2} - \ldots - a_1\beta_1 - a_0\beta_0\end{cases} \qquad (2\text{-}105)$$

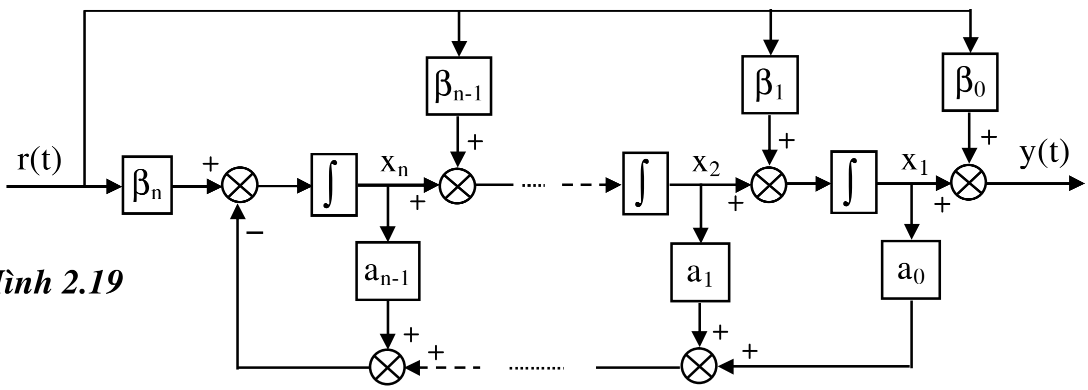
Phương trình trạng thái của hệ thống sẽ là :

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Br\\ y = Cx + Dr\end{cases} \qquad (2\text{-}106)$$

trong đó :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1}\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\\ \beta_n\end{bmatrix};\ C=[\,1\ \ 0\ \ldots 0\ \ 0\,];\ D=\beta_0=b_n$$

Sơ đồ khối của hệ thống có thể biểu diễn như hình vẽ:




*Hình 2.19*

**Ví dụ 2.17.** Viết phương trình trạng thái của hệ có phương trình vi phân :

$$\dddot{y}(t)+5\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+8y(t)=8\dot{r}(t)+24r(t) \qquad (1)$$

***Giải.*** Đặt các biến trạng thái như sau:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 r \\ x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 r \end{cases}$$

và đặt: $\dot{x}_3 = -a_2x_3 - a_1x_2 - a_0x_1 + \beta_3 r = -5x_3 - 6x_2 - 8x_1 + \beta_3 r$

Ta được: $$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 r \\ \ddot{y} = \dot{x}_2 + \beta_1\dot{r} = x_3 + \beta_2 r + \beta_1\dot{r} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \dddot{y} = \dot{x}_3 + \beta_2\dot{r} + \beta_1\ddot{r} = -5x_3 - 6x_2 - 8x_1 + \beta_3 r + \beta_2\dot{r} + \beta_1\ddot{r}$

$\Rightarrow \quad \dddot{y} + 5\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = (-5x_3 - 6x_2 - 8x_1 + \beta_3 r + \beta_2\dot{r} + \beta_1\ddot{r})$
$\qquad + (5x_3 + 5\beta_2 r + 5\beta_1\dot{r}) + (6x_2 + 6\beta_1 r) + 8x_1$

$\Leftrightarrow \quad \dddot{y} + 5\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = \beta_1\ddot{r} + (\beta_2 + 5\beta_1)\dot{r} + (\beta_3 + 5\beta_2 + 6\beta_1)r \qquad (2)$

Đồng nhất (2) với phương trình (1) ta được :

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 + 5\beta_1 = 8 \;\Rightarrow\; \beta_2 = 8 \\ \beta_3 + 5\beta_2 + 6\beta_1 = 24 \;\Rightarrow\; \beta_3 = 24 - 5\beta_2 - 6\beta_1 = -16 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình trạng thái của hệ thống là:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 r = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 r = x_3 + 8r \\ \dot{x}_3 = -5x_3 - 6x_2 - 8x_1 + \beta_3 r = -8x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 16r \end{cases}$$

Hay dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -16 \end{bmatrix} r$$

Đáp ứng của hệ thống :

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

**Ví dụ 2.18.** Viết phương trình trạng thái của hệ có phương trình vi phân :

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 4y(t) = 2\ddot{u}(t) + 10\dot{u}(t) + 3u(t)$$

***Giải.*** Đặt các biến trạng thái như sau:

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u \end{cases}$$

và đặt: $\dot{x}_2 = -a_1x_2 - a_0x_1 + \beta_2 u = -8x_2 - 4x_1 + \beta_2 u$

Ta được:
$$y = x_1 + \beta_0 u$$
$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \beta_0\dot{u} = x_2 + \beta_1 u + \beta_0\dot{u}$$
$$\ddot{y} = \dot{x}_2 + \beta_1\dot{u} + \beta_0\ddot{u} = -8x_2 - 4x_1 + \beta_2 u + \beta_1\dot{u} + \beta_0\ddot{u}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + 8\dot{y} + 4y = (-8x_2 - 4x_1 + \beta_2 u + \beta_1\dot{u} + \beta_0\ddot{u}) + (8x_2 + 8\beta_1 u + 8\beta_0\dot{u}) + (4x_1 + 4\beta_0 u)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{y} + 8\dot{y} + 4y = \beta_0\ddot{u} + (\beta_1 + 8\beta_0)\dot{u} + (\beta_2 + 8\beta_1 + 4\beta_0)u$$

Đồng nhất hệ số với phương trình đã cho, ta được :
$$\begin{cases} \beta_0 = 2 \\ \beta_1 + 8\beta_0 = 10 & \Rightarrow \quad \beta_1 = 10 - 8\beta_0 = -6 \\ \beta_2 + 8\beta_1 + 4\beta_0 = 3 & \Rightarrow \quad \beta_2 = 3 - 8\beta_1 - 4\beta_0 = 43 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình trạng thái của hệ thống là:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 - 6u \\ \dot{x}_2 = -8x_2 - 4x_1 + \beta_2 u = -4x_1 - 8x_2 + 43u \end{cases}$$

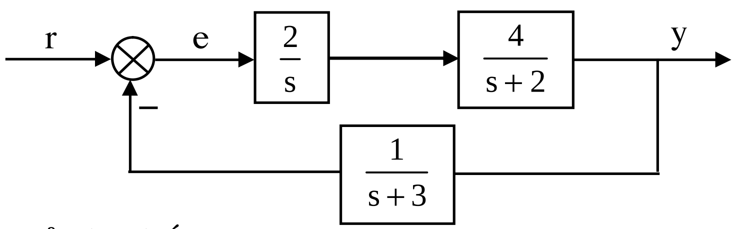
Hay dưới dạng ma trận:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 43 \end{bmatrix}u$$

Đáp ứng của hệ thống:
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2u$$

### 2.7.3 Lập phương trình trạng thái từ hàm truyền và sơ đồ khối

<u>**Cách 1**</u>**:** Biến đổi hàm truyền thành phương trình vi phân, sau đó sử dụng các phương pháp đã nêu ở phần trước.

**Ví dụ 2.19.** Lập phương trình trạng thái mô tả hệ thống có sơ đồ khối như sau:




***Giải.*** Hàm truyền của hệ thống:
$$G(s) = \frac{\frac{2}{s}\cdot\frac{4}{(s+2)}}{1 + \frac{2}{s}\cdot\frac{4}{(s+2)}\cdot\frac{1}{(s+3)}} = \frac{8(s+3)}{s(s+2)(s+3)+8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{8(s+3)}{s(s+3)(s+2)+8} = \frac{8s+24}{s^3+5s^2+6s+8}$$

$$\Rightarrow \quad (s^3+5s^2+6s+8)Y(s) = (8s+24)R(s)$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta thu được phương trình vi phân:

$$\dddot{y}(t)+5\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+8y(t)=8\dot{r}(t)+24r(t)$$

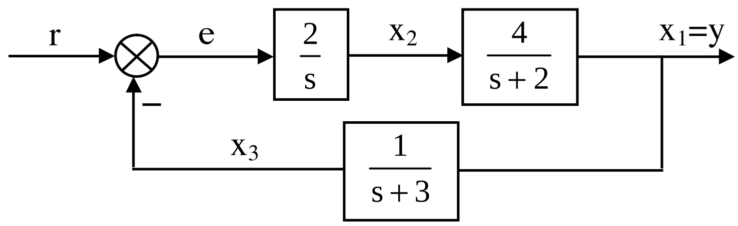
Từ kết quả ở ví dụ 2.17 ta được phương trình trạng thái của hệ là :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 8\\ -16\end{bmatrix}r$$

$$y=x_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

**<u>Cách 2</u>:** Đặt biến trạng thái trực tiếp trên sơ đồ khối.

Hãy xét bài toán ở ví dụ 2.19 và đặt các biến trạng thái ngay trên sơ đồ khối.




Với cách đặt biến trạng thái như trên, ta có các quan hệ:

$$X_1(s)=\frac{4}{s+2}X_2(s)$$

$$\Rightarrow \quad sX_1(s)+2X_1(s)=4X_2(s)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1(t)=-2x_1(t)+4x_2(t) \qquad (1)$$

$$X_2(s)=\frac{2}{s}E(s)=\frac{2}{s}[R(s)-X_3(s)]$$

$$\Rightarrow \quad sX_2(s)=-2X_3(s)+2R(s)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_2(t)=-2x_3(t)+2r(t) \qquad (2)$$

$$X_3(s)=\frac{1}{s+3}X_1(s)$$

$$\Rightarrow \quad sX_3(s)+3X_3(s)=X_1(s)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_3(t)=x_1(t)-3x_3(t) \qquad (3)$$

Kết hợp (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình trạng thái:

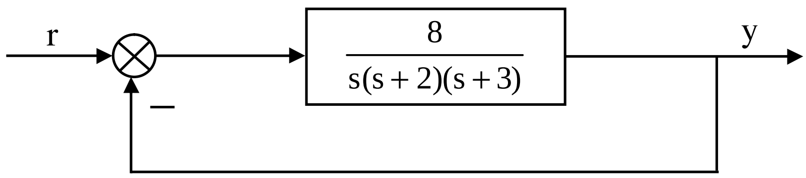
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\\ 0\end{bmatrix}r(t)$$

Đáp ứng của hệ thống :

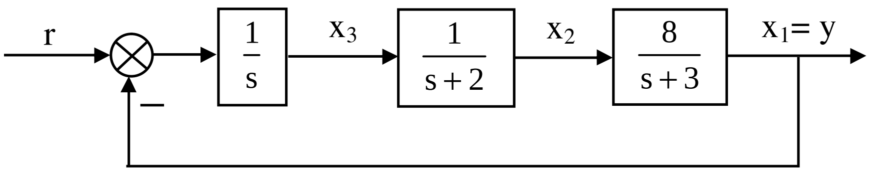
$$y(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

***Nhận xét:*** Với cùng một sơ đồ khối, hàm truyền, hay phương trình vi phân nhưng tùy theo cách đặt các biến trạng thái mà ta có thể lập được các hệ phương trình trạng thái khác nhau. Do đó, một hệ thống có thể mô tả bằng nhiều mô hình trạng thái.

**Ví dụ 2.20** Hãy lập phương trình trạng thái mô tả hệ thống có sơ đồ khối như sau:




***Giải***. Vẽ lại sơ đồ khối của hệ thống trên với các biến trạng thái được đặt như sau:




Với cách đặt biến trạng thái như trên, ta có các quan hệ:

$$X_1(s) = \frac{8}{s+3} X_2(s)$$

$$\Rightarrow \quad sX_1(s) + 3X_1(s) = 8X_2(s)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + 8x_2(t) \qquad (1)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+2} X_3(s)$$

$$\Rightarrow \quad sX_2(s) + 2X_2(s) = X_3(s)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + x_3(t) \qquad (2)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s}[R(s) - X_1(s)]$$

$$\Rightarrow \quad sX_3(s) = R(s) - X_1(s)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_3(t) = -x_1(t) + r(t) \qquad (3)$$

Kết hợp (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình trạng thái:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Đáp ứng của hệ thống : $y(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

***Nhận xét:*** Nếu chuyển đổi thứ tự các khối trong sơ đồ khối ta sẽ thu được các mô hình trạng thái khác nhau.

### 2.7.4 Tìm hàm truyền từ phương trình trạng thái

Cho hệ SISO có mô hình trạng thái :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Br \\ y = Cx + Dr \end{cases}$$

Biến đổi Laplace hai vế phương trình thứ nhất với các điều kiện đầu bằng 0, ta được :

$$sX(s) = AX(s) + BR(s)$$

$\Leftrightarrow \quad (sI - A)X(s) = BR(s)$ ( với I là ma trận đơn vị)

$\Leftrightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1} BR(s)$

Tương tự, ảnh Laplace của phương trình thứ hai là:

$$Y(s) = CX(s) + DR(s)$$

Với hai kết quả trên ta suy ra:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D]\, R(s)$$

Hàm truyền của hệ thống :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D$$

***Nhận xét :***

- Để tránh phải tính ma trận nghịch đảo, có thể dùng công thức:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D = \frac{\det(sI - A + BC)}{\det(sI - A)} - 1 + D$$

- Phương trình $\det(sI - A) = 0$ chính là phương trình đặc tính của hệ thống. Nói cách khác, các giá trị riêng của ma trận A chính là các cực của G(s).

**Ví dụ 2.21.** Cho hệ thống có phương trình trạng thái :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Hãy xác định hàm truyền của hệ thống.

***Giải.***

***<u>Cách 1:</u>*** $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ (D= 0)

Ta có: $(sI - A) = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$

Áp dụng công thức tính nghịch đảo ma trận cấp hai :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ta được: $(sI - A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(sI - A)}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{s^2 + 5s + 1}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}$

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 5s + 1}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 5s + 1}\begin{bmatrix} 2s \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 5s + 1}\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2s \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 1}$$

Do đó : $G(s) = \dfrac{2s + 1}{s^2 + 5s + 1}$

***<u>Cách 2:</u>***

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$sI - A + BC = \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+7 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \dfrac{\det(sI - A + BC)}{\det(sI - A)} - 1$ (D=0)

$$G(s) = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^2 + 5s + 1} - 1 = \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 1}$$

## Chương 3

# ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC

Nội dung chương này đề cập đến hai vấn đề:

- Khảo sát đặc tính động học của các khâu động học cơ bản.
- Xây dựng đặc tính động học, cụ thể là đặc tính tần số của hệ thống.

Ở chương 2, khi xây dựng mô tả toán cho các phần tử điều khiển chúng ta nhận thấy có những phần tử mặc dù khác nhau về bản chất vật lý nhưng lại có dạng mô hình toán học giống nhau (ví dụ hệ lò xo-khối lượng-giảm chấn, mạch điện LRC, động cơ điện DC đều có thể mô tả bằng phương trình vi phân và hàm truyền bậc hai; lò xo, cảm biến, điện trở đều có hàm truyền tỉ lệ,...). Để thuận tiện cho việc khảo sát, người ta chia chúng thành từng nhóm và gọi là khâu động học, ví dụ khâu tỉ lệ, khâu quán tính bậc nhất, khâu bậc hai,... Một đối tượng điều khiển, bộ điều khiển, hay toàn bộ hệ thống cũng có thể là một khâu động học duy nhất hoặc bao gồm nhiều khâu động học cơ bản ghép nối tổ hợp với nhau.

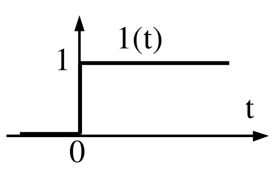
Đặc tính động học của khâu hay hệ thống chính là sự thay đổi tín hiệu ra theo thời gian hay tần số khi có tín hiệu tác động ở đầu vào. Đặc tính động học xét trong miền thời gian và miền tần số được gọi tương ứng là đặc tính thời gian và đặc tính tần số. Trong thực tế các tín hiệu tác động vào hệ thống điều khiển thường không được biết trước. Do đó, để khảo sát các đặc trưng của đáp ứng động học người ta dùng một số tín hiệu vào chuẩn, định trước, như hàm bậc thang đơn vị, hàm xung đơn vị, hàm dốc đơn vị, hàm sin. Các tín hiệu này gọi là tín hiệu thử hay hàm thử.

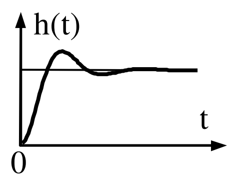
### 3.1 Đặc tính thời gian (đặc tính quá độ)

Đặc tính thời gian của khâu hay hệ thống thể hiện sự thay đổi tín hiệu ra theo thời gian khi có tín hiệu chuẩn tác động ở đầu vào. Đặc tính thời gian thường được mô tả bằng hàm quá độ, hàm trọng lượng, đáp ứng dốc. Công cụ toán học để nghiên cứu đặc tính thời gian là phép biến đổi Laplace.

#### 1) Hàm quá độ

Để thử hệ thống ổn định hoá người ta thường dùng tín hiệu vào là hàm bậc thang đơn vị 1(t). Nếu tín hiệu vào là hàm bậc thang đơn vị thì tín hiệu ra gọi là ***đáp ứng bậc thang*** hay ***hàm quá độ***, ký hiệu là h(t).




Với khâu động học có tín hiệu vào x(t), tín hiệu ra y(t), ta có:

$$h(t) = y(t)\Big|_{x(t)=1(t)}$$

Để tìm hàm quá độ h(t) khi biết hàm truyền G(s) ta thực hiện hai bước:

Bước 1: Tìm ảnh Laplace H(s) của h(t)

Do: $H(s) = X(s).G(s) = L[1(t)].G(s) = \frac{1}{s}G(s)$

Nên: $H(s) = \frac{G(s)}{s}$ (3-1)

Bước 2: Biến đổi Laplace ngược của H(s) ta có hàm quá độ h(t)

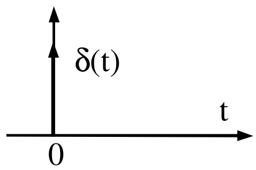
$h(t) = L^{-1}[H(s)]$ (3-2)

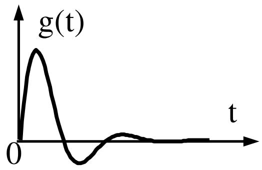
**2) Hàm trọng lượng**

Nếu tín hiệu vào là hàm xung đơn vị $\delta(t)$ thì tín hiệu ra gọi là ***đáp ứng xung, hàm quá độ xung,*** hay ***hàm trọng lượng***, ký hiệu là g(t).

Tức là:

$g(t) = y(t)\Big|_{x(t)=\delta(t)}$




Nếu biết hàm truyền G(s) có thể tìm hàm trọng lượng g(t) như sau :

Do $G(s) = \frac{L[g(t)]}{L[\delta(t)]} = L[g(t)]$

Nên $g(t) = L^{-1}[G(s)]$ (3-3)

Nếu biết hàm quá độ h(t) có thể tìm hàm trọng lượng g(t) như sau :

Do tín hiệu vào: $\delta(t) = \frac{d[1(t)]}{dt}$

Nên tín hiệu ra: $g(t) = \frac{d[h(t)]}{dt}$ (3-4)

**3) Đáp ứng dốc**

Hàm dốc đơn vị thường dùng làm tín hiệu vào để thử hệ thống điều khiển theo dõi. Khi tín hiệu vào là hàm dốc đơn vị thì tín hiệu ra gọi là ***đáp ứng dốc.***

**4) Đáp ứng với tín hiệu vào bất kỳ**

Tổng quát, một tín hiệu x(t) xác định và liên tục với t ≥0 bất kỳ có thể biểu diễn thông qua hàm $\delta(t)$ hoặc 1(t) như sau:

$$x(t) = x(t).\int_0^t \delta(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (3\text{-}5)$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}1(t-\tau)d\tau \quad (3\text{-}6)$$

Với: $x(\tau)$ là giá trị xác định của hàm x(t) tại thời điểm $t = \tau$

$\delta(t-\tau)$ là xung đơn vị được phát tại thời điểm $t = \tau$

$1(t-\tau)$ là hàm bậc thang đơn vị được phát tại thời điểm $t = \tau$ .

Dựa vào tính chất xếp chồng của hệ tuyến tính ta có thể xác định tín hiệu ra y(t) thông qua hàm trọng lượng g(t) hoặc hàm quá độ h(t) như sau:

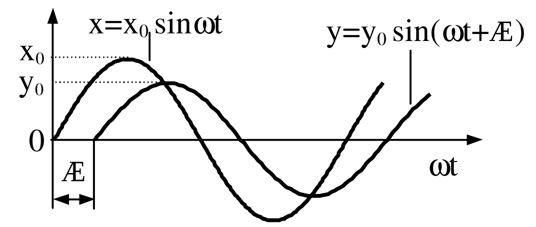
$$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}h(t-\tau)d\tau \qquad (3\text{-}7)$$

### 3.2 Đặc tính tần số

Đặc tính tần số thể hiện mối liên hệ giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào của hệ thống ở trạng thái xác lập khi thay đổi tần số của tín hiệu vào dạng điều hoà.

#### 3.2.1 Hàm tần số

Khi tác động vào hệ thống một tín hiệu điều hoà $x = x_0 \sin\omega t$ thì đáp ứng của hệ ở trạng thái xác lập sẽ là một tín hiệu tuần hoàn có cùng tần số, khác biên độ và lệch pha so với tín hiệu vào một góc ∅, được mô tả bằng hàm $y = y_0 \sin(\omega t + \varnothing)$.




***Hình 3.2*** *Tín hiệu vào điều hoà và đáp ứng*

Tổng quát, nếu tín hiệu vào là dao động điều hoà $x = x_0 e^{j\omega t}$ thì ở trạng thái xác lập, tín hiệu ra có dạng $y = y_0 e^{j(\omega t + \phi)}$.

Khi cho ω thay đổi thì ∅ và $y_0$ cũng thay đổi. Hàm góc pha ∅(ω) và tỉ số biên độ $\frac{y_0}{x_0}(\omega)$ chính là cơ sở để nghiên cứu đặc tính tần số của hệ thống.

Lấy đạo hàm của các tín hiệu điều hoà x và y, ta được :

$$\frac{d^i x}{dt^i} = (j\omega)^i x_0 e^{j\omega t} \qquad (i=1,...m) \qquad (3\text{-}8)$$

$$\frac{d^i y}{dt^i} = (j\omega)^i y_0 e^{j(\omega t + \varnothing)} \quad (i=1,...n) \qquad (3\text{-}9)$$

Thay các biến đổi của x, y và các đạo hàm của chúng vào phương trình vi phân tổng quát (2-1) của hệ thống rồi sắp xếp và rút gọn lại, ta được:

$$G(j\omega) = \frac{y_0}{x_0}e^{j\varnothing} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + ... + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + ... + a_0} \qquad (3\text{-}10)$$

Hàm G(jω) gọi là **hàm truyền tần số** hay gọi tắt là **hàm tần số**.

So sánh với biểu thức hàm truyền tổng quát của hệ thống :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0}$$

Ta thấy, nếu không kể đến điều kiện ban đầu thì hàm truyền tần số có thể xác định bằng cách thay biến s =jω vào biểu thức hàm truyền. Tức là:

$$G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}$$

### 3.2.2 Biểu diễn đặc tính tần số

#### 1) Biểu đồ Nyquist

Tổng quát G(jω) là hàm phức nên có thể biểu diễn dưới dạng đại số :

$$G(j\omega) = Re(\omega) + j\,Im(\omega) \qquad (3\text{-}11)$$

Với: $Re(\omega) = Re\{G(j\omega)\}$ : phần thực của hàm G(jω)

$Im(\omega) = Im\{G(j\omega)\}$ : phần ảo của hàm G(jω)

Hoặc dưới dạng cực (dạng môđun-pha) :

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varnothing(\omega)} \qquad (3\text{-}12)$$

Trong đó:

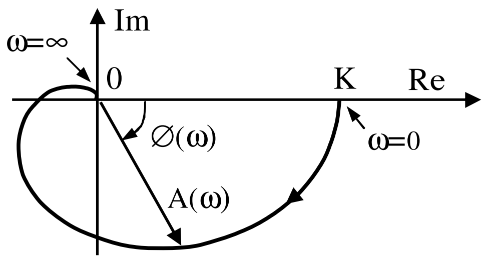
Biên độ $A(\omega) = \frac{y_0}{x_0}(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}$ (3-13)

Góc pha $\varnothing(\omega) = \angle G(j\omega) = \mathrm{arctg}\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}$ (3-14)

$\Rightarrow$ $Re(\omega) = A(\omega)\cos\varnothing(\omega)$ (3-15)

$Im(\omega) = A(\omega)\sin\varnothing(\omega)$ (3-16)

Khi cho tần số góc ω của tín hiệu vào biến thiên từ 0 đến ∞ thì điểm ngọn của vectơ hàm tần số sẽ vẽ thành một đường cong trên mặt phẳng phức và được gọi là đường đặc tính tần biên pha hay còn gọi là biểu đồ Nyquist .




***Hình 3.3*** *Biểu đồ Nyquist*

#### 2) Biểu đồ Bode

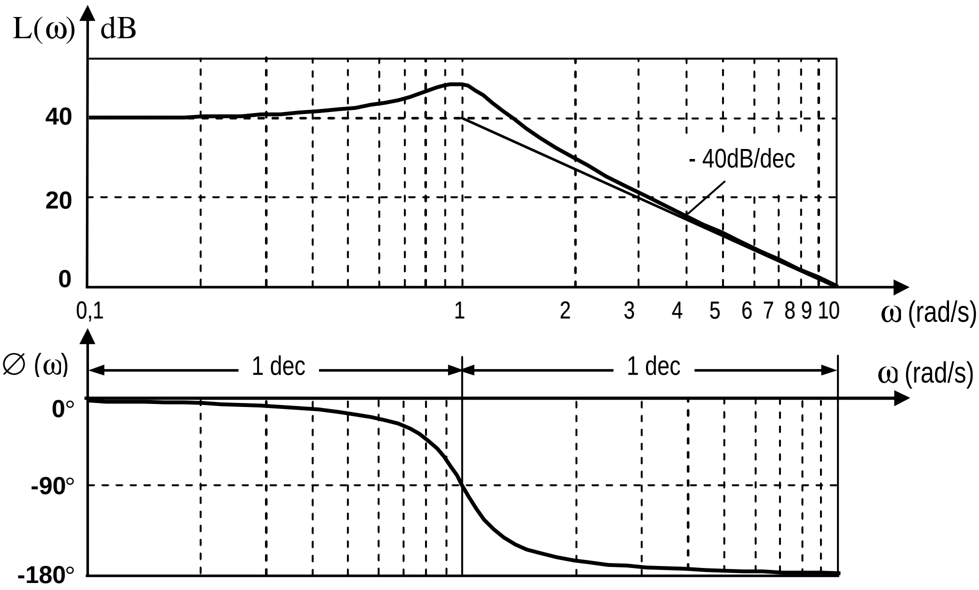
Biểu đồ Bode gồm hai thành phần :

- Biểu đồ Bode biên độ : biểu diễn biên độ logarit L( ω) theo tần số ω

  L(ω) tính bằng decibel [dB] theo công thức: $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$
- Biểu đồ Bode pha : biểu diễn giá trị góc pha ∅( ω) theo tần số ω

  Góc pha ∅( ω) thường lấy đơn vị là độ [ ° ]

Cả hai đồ thị này đều có trục hoành là tần số ω [rad/s] nhưng không chia đều theo thang thập phân mà chia theo thang logarit, nhờ vậy chỉ với độ dài trục hoành tương đối bé ta vẫn biểu diễn được một dải tần số rất lớn. Trục tung lấy theo L( ω) [dB] cũng rất hữu ích: Nếu hệ thống gồm nhiều khâu động học ghép nối tiếp thì biên độ tổng hợp A(ω) sẽ là ***tích*** các biên độ $A_i(\omega)$ thành phần, còn lấy theo biên độ logarit thì L(ω) là ***tổng*** các $L_i(\omega)$ thành phần, như vậy rất thuận tiện cho việc cộng bằng đồ thị để xây dựng đặc tính tần số của toàn bộ hệ thống.




***Hình 3.4*** *Biểu đồ Bode*

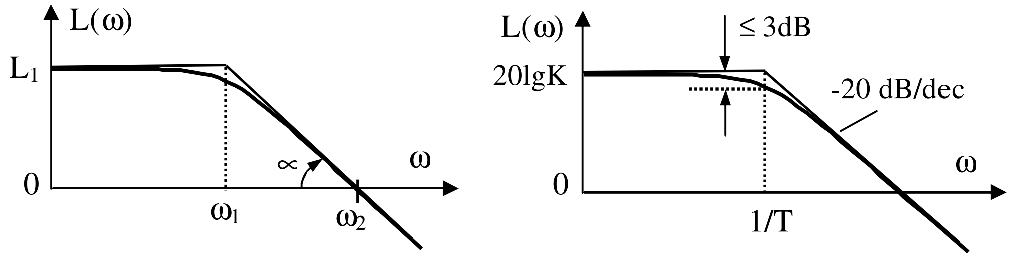
Trên biểu đồ Bode, người ta thường dùng các đơn vị sau :

- **decibel**, ký hiệu dB.
  Biên độ $A(\omega)$ có giá trị dB tương ứng là $L(\omega)=20\lg A(\omega)$ [dB].
- **decade**, ký hiệu dec.
  decade là khoảng cách giữa hai tần số cách nhau 10 lần.

$$1 \text{ dec} = \lg\frac{10\omega}{\omega} = \lg 10.$$

$\Rightarrow$ Khoảng dec giữa hai tần số bất kỳ $\omega_1$ và $\omega_2$ sẽ là : $\lg\frac{\omega_2}{\omega_1}$ [dec]

- **decibel/decade,** ký hiệu dB/dec
  Độ dốc của đường $L(\omega)$ được tính bằng đơn vị dB/dec .




Độ dốc của đường $L(\omega)$ có thể xác định từ đồ thị như sau:

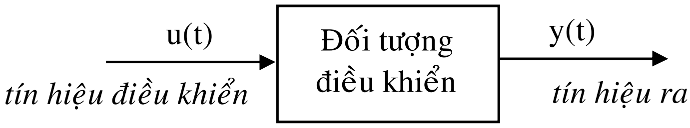
$$\text{Độ dốc} = \text{tg}\alpha = \frac{(L_2 - L_1)}{\lg\frac{\omega_2}{\omega_1}} = \frac{-L_1}{\lg\frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad \left[\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\right]$$

Để đơn giản hoá việc xây dựng biểu đồ Bode, người ta thường thay thế đường cong $L(\omega)$ bằng các đường tiệm cận nếu sai số nhỏ hơn giới hạn cho phép là $\pm 3$ dB.

## 3.3 Đặc tính động học của đối tượng điều khiển

Đối tượng điều khiển (hay hệ thống được điều khiển) là các thiết bị, máy móc, quá trình công nghệ có các đại lượng ra cần được điều khiển để đạt mục tiêu nhất định, như duy trì giá trị ổn định, không đổi hoặc thay đổi theo một chương trình định trước,...

Tín hiệu vào của đối tượng là tín hiệu điều khiển u(t) từ bộ điều khiển đưa tới. Tín hiệu ra chính là đại lượng ra y(t) mà ta cần điều khiển, ví dụ là nhiệt độ, mức, áp suất, lưu lượng, lực, vận tốc, vị trí, góc quay...




Đối tượng điều khiển có thể là một khâu động học duy nhất hoặc bao gồm nhiều khâu động học cơ bản ghép nối tổ hợp lại. Trong phần này chúng ta sẽ khảo sát đặc tính của các khâu động học cơ bản, bao gồm: khâu tỉ lệ, khâu quán tính bậc nhất, khâu bậc hai, khâu tích phân lý tưởng, khâu vi phân lý tưởng, khâu vi phân bậc một, khâu trễ,... Trên cơ sở đó, chúng ta có thể tiến hành xây dựng đặc tính động học của các đối tượng có cấu trúc phức tạp.

### 1) Khâu tỉ lệ ( khâu P )

Khâu tỉ lệ còn gọi là khâu khuếch đại, khâu ổn định bậc 0, hay khâu P.

§ Hàm truyền : $G(s) = K$

Thông số đặc trưng: K _ gọi là ***hệ số khuếch đại*** hay ***độ lợi***

§ Ví dụ thực tế: lò xo, đòn bẩy, bộ truyền bánh răng, biến trở, van tuyến tính; cảm biến, chiết áp, mạch khuếch đại công suất, bộ khuếch đại cách ly.

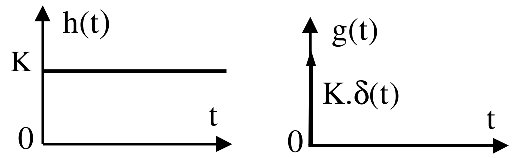
§ Đặc tính thời gian:

- Hàm quá độ

$$h(t) = K.1(t) = K$$

- Hàm trọng lượng

$$g(t) = K.\delta(t)$$



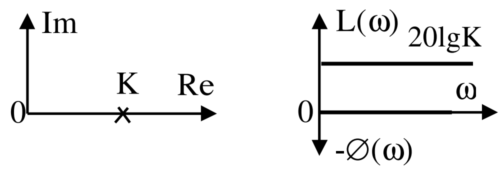

***Hình 3.5*** *Hàm quá độ và hàm trọng lượng của khâu P*

§ Đặc tính tần số:

- Hàm tần số $G(j\omega) = K$
- Biên độ $A(\omega) = K$

$\Rightarrow$ $L(\omega) = 20\lg K$

- Góc pha $\varnothing(\omega) = \text{arctg}\dfrac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} = 0$




***Hình 3.6*** *Biểu đồ Nyquist và biểu đồ Bode của khâu P*

Do đó khâu tỉ lệ có :

- Biểu đồ Nyquist là một điểm trên trục hoành có toạ độ (K,j0)
- Biểu đồ Bode biên độ là đường thẳng song song với trục hoành.
- Biểu đồ Bode pha : trùng với trục hoành

## 2) Khâu quán tính bậc nhất (khâu $PT_1$)

§ Hàm truyền :

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

Thông số đặc trưng: K là ***hệ số khuếch đại*** .

T là ***hằng số thời gian*** của khâu.

§ Ví dụ : lò nhiệt, hệ lò xo-giảm chấn, mạch RL, RC, tuabin, máy phát điện một chiều, động cơ điện không đồng bộ hai pha với lượng ra là tốc độ quay...

§ Đặc tính thời gian:

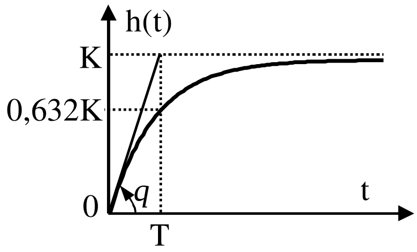
- Hàm quá độ h(t):

Từ ảnh Laplace của đáp ứng :

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

Ta có hàm quá độ:

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = K(1-e^{-t/T})$$




***Hình 3.7***

*Hàm quá độ của khâu $PT_1$*

***Nhận xét*** :

1) Nếu gọi giá trị xác lập của h(t) là $h(\infty)$ thì: $h(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} h(t) = K$

2) Tại t = T ta có $h(T) = (1-e^{-1})K \approx 0,632K = (63,2\%)K$

Tức là ở thời điểm t =T, tín hiệu ra được 63,2% giá trị xác lập (ổn định).

Tương tự ta có h(2T)=86,5%K; h(3T)=95%K; h(4T)=98,2%K; h(5T)=99,3%K.

Ta thấy hằng số thời gian T đặc trưng cho mức độ đáp ứng nhanh hay chậm của khâu. Khâu có T nhỏ sẽ nhanh chóng đạt đến trạng thái ổn định, ngược lại T lớn thì khâu cần nhiều thời gian mới đạt đến trạng thái ổn định.

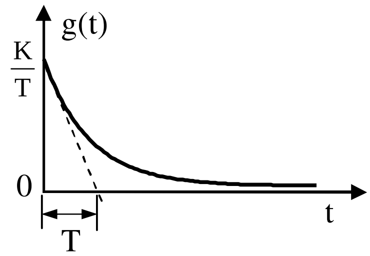
3) Nếu kẻ tiếp tuyến với h(t) tại điểm 0 và gọi góc của tiếp tuyến đó là $q$ thì:

$$tg q = \frac{dh}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{K}{T}$$

- Hàm trọng lượng :

Nhận được bằng cách lấy đạo hàm của hàm quá độ :

$$g(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{K}{T}e^{-t/T}$$




***Hình 3.8***

*Hàm trọng lượng của khâu $PT_1$*

§ Đặc tính tần số :

- Hàm truyền tần số $G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{K}{Tj\omega+1}$

Nhân tử và mẫu với (1-Tjω), ta được :

$$G(j\omega) = \frac{K}{T^2\omega^2+1} + j\frac{-KT\omega}{T^2\omega^2+1} = Re(\omega) + jIm(\omega)$$

- Biên độ $A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$

- Góc pha $\varnothing(\omega) = \text{arctg}\dfrac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} = -\text{ arctg }(T\omega)$

- Biên độ lôgarit $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$

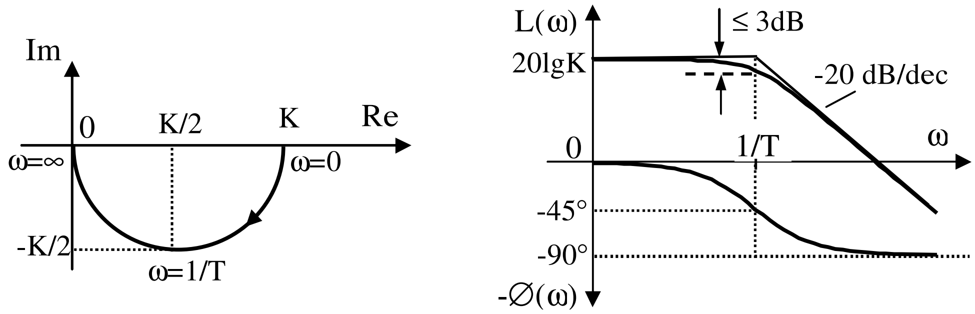
- Để vẽ biểu đồ Nyquist ta có nhận xét sau:

$$\left(\text{Re}(\omega) - \frac{K}{2}\right)^2 + \text{Im}^2(\omega) = \left(\frac{K}{T^2\omega^2 + 1} - \frac{K}{2}\right)^2 + \left(\frac{-KT\omega}{T^2\omega^2 + 1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{K(1 - T^2\omega^2)}{2(T^2\omega^2 + 1)}\right)^2 + \frac{K^2T^2\omega^2}{(T^2\omega^2 + 1)^2} = \frac{K^2\left[(1 - T^2\omega^2)^2 + 4T^2\omega^2\right]}{4(T^2\omega^2 + 1)^2} = \frac{K^2}{4}$$

Mặt khác, khi $\omega = 0 \rightarrow +\infty$ thì góc pha $\varnothing(\omega) = -\text{ arctg}(T\omega) \le 0$. Do đó biểu đồ Nyquist của khâu $PT_1$ là nửa dưới của đường tròn tâm (K/2, j0), bán kính K/2.

- Để vẽ biểu đồ Bode, ta cho $\omega$ biến thiên từ 0 đến $+\infty$, tính các giá trị $L(\omega)$ và $\varnothing(\omega)$ tương ứng rồi thể hiện trên đồ thị.




***Hình 3.9*** *Biểu đồ Nyquist và biểu đồ Bode của khâu $PT_1$*

Cũng có thể vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ bằng hai đường tiệm cận :

- Khi $\omega << 1/T$ thì $L(\omega) \approx 20\lg K \Rightarrow$ đường tiệm cận nằm ngang.
- Khi $\omega >> 1/T$ thì $L(\omega) \approx 20\lg K - 20\lg(\omega T) \Rightarrow$ đường tiệm cận nghiêng có độ dốc - 20 dB/dec

Điểm tần số $\omega = 1/T$ tại giao điểm của 2 tiệm cận gọi là tần số gãy. Tại tần số gãy, sai số giữa đường cong $L(\omega)$ chính xác và các đường tiệm cận có giá trị lớn nhất $\Delta L(\omega) = -20\lg\sqrt{2} \approx -3$ dB.

Một số điểm đặc biệt :

$\omega = 0$ : Re(ω)= K ; Im(ω)= 0 ; L(ω)= 20lgK ; ∅(ω)=0

$\omega = 1/T$ : Re(ω)= K/2 ; Im(ω)= - K/2 ; L(ω)≈ 20lgK ; ∅(ω)= -45°

$\omega = +\infty$ : Re(ω)= 0 ; Im(ω)= 0 ; ∅(ω)= -90°

**3) Khâu bậc hai ( khâu $PT_2$ )**

**3a) Khảo sát trong miền thời gian**

§ Hàm truyền :

$$G(s)=\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$$

Trong đó, T : hằng số thời gian

K : hệ số khuếch đại

$\xi$ : hệ số tắt dần (hệ số suy giảm)

§ Ví dụ : Các hệ cơ khí gồm lò xo-khối lượng-giảm chấn, mạch điện RLC, động cơ điện DC điều khiển tốc độ bằng điện áp phần ứng, ...

§ Đặc tính thời gian:

Xét nghiệm của phương trình đặc tính: $T^2s^2+2\xi Ts+1=0$

Biệt số $\Delta'=(\xi T)^2-T^2=T^2(\xi^2-1)$

Ta phân biệt hai trường hợp : Khi $\xi \geq 1$, khâu $PT_2$ được gọi là khâu quán tính bậc hai; Khi $0 \leq \xi < 1$, khâu $PT_2$ được gọi là khâu dao động bậc hai.

**<u>Khâu quán tính bậc hai</u>**

Ø Khi $\xi > 1$, phương trình đặc tính có hai nghiệm thực riêng biệt. Nếu ký hiệu hai nghiệm này là $s_1=-(1/T_1)$ và $s_2=-(1/T_2)$ ta sẽ có :

$$T_1.T_2=T^2 \quad \text{và} \quad T_1+T_2=2\xi T$$

$$\Rightarrow \quad G(s)=\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}=\frac{K}{T^2(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{K}{(T_1s+1)\,(T_2s+1)}$$

Do đó khâu quán tính bậc hai tương đương với hai khâu quán tính bậc nhất ghép nối tiếp có các hằng số thời gian $T_1$ và $T_2$ .

$$H(s)=\frac{G(s)}{s}=\frac{\frac{K}{T_1T_2}}{s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}=K\left[\frac{1}{s}-\frac{T_1}{T_1-T_2}.\frac{1}{s+\frac{1}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}.\frac{1}{s+\frac{1}{T_2}}\right]$$

$\Rightarrow$ Hàm quá độ $$h(t)=K\left(1-\frac{T_1}{T_1-T_2}.e^{-t/T_1}+\frac{T_2}{T_1-T_2}.e^{-t/T_2}\right)$$

Hàm trọng lượng $$g(t)=\frac{dh}{dt}=\frac{K}{T_1-T_2}\left(e^{-t/T_1}-e^{-t/T_2}\right)$$

Ø Khi $\xi = 1$, phương trình đặc tính có nghiệm kép $s_1=s_2=-(1/T)$

$\Rightarrow$ Hàm quá độ $$h(t)=K\left[1-\left(1+\frac{t}{T}\right)e^{-t/T}\right]$$

Hàm trọng lượng $$g(t)=\frac{dh}{dt}=\frac{K}{T^2}\,te^{-t/T}$$

**Khâu dao động bậc hai**

- Khi $0 \le \xi < 1$ Phương trình đặc tính có hai nghiệm phức.

  Với ký hiệu $\omega_n = \dfrac{1}{T}$ ; $\omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ ; $\varnothing = \arccos\xi$ ; ta có :

  Hàm truyền $G(s) = \dfrac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

  $$\Rightarrow H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{K\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = K\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+\xi\omega_n) + \dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\omega}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega^2}\right]$$

  Suy ra hàm quá độ :

  $$h(t) = K\left[1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega t\right)\right] = K\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega t + \varnothing)\right]$$

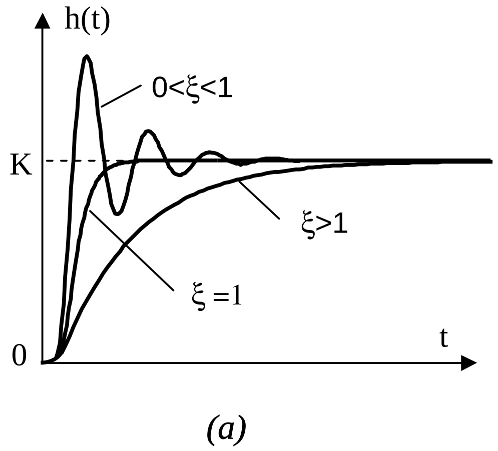
  Hàm trọng lượng :

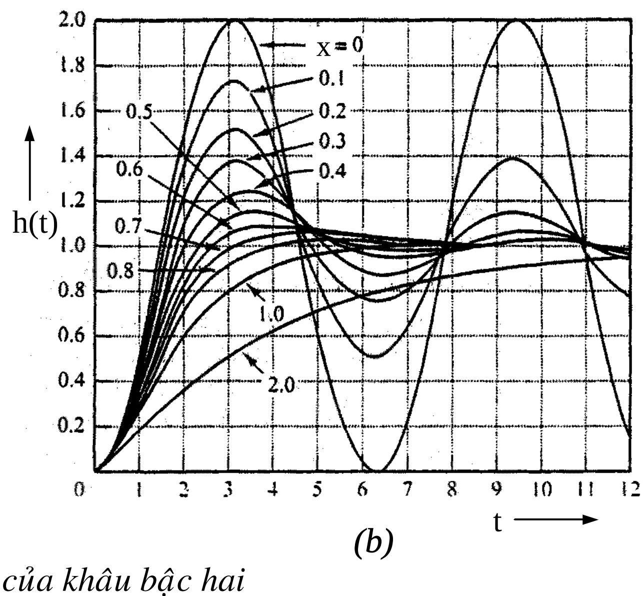
  $$g(t) = \frac{dh}{dt} = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{K\omega_n{}^2}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega^2}\right] = \frac{\omega_n^2}{\omega}Ke^{-\xi\omega_n t}\sin\omega t$$

  Các biểu thức trên cho thấy đặc tính thời gian của khâu dao động bậc hai có dạng dao động tắt dần. Hàm quá độ suy giảm về giá trị xác lập K và hàm trọng lượng suy giảm về 0. Giá trị $\xi$ càng lớn, dao động suy giảm càng nhanh, do đó $\xi$ gọi là hệ số suy giảm hay hệ số tắt dần.

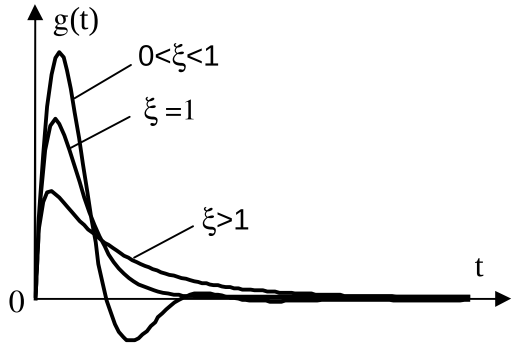
  Khi $\xi = 0$ thì h(t)= K[1- sin ($\omega_n$t + 90°)], đáp ứng của khâu là dao động không đổi với tần số $\omega_n$ =1/T. Do đó $\omega_n$ gọi là tần số riêng của khâu dao động bậc hai.

- Nếu khảo sát mở rộng với $\xi < 0$ thì đáp ứng sẽ là dao động tăng dần hoặc chuyển động tăng dần, $h(\infty) = \infty$ nên khi $\xi < 0$ khâu bậc hai không ổn định.




*Hình 3.10 Hàm quá độ của khâu bậc hai*
*(a) Tổng quát ; (b) hệ số khuếch đại K=1*




***Hình 3.11*** *Hàm trọng lượng của khâu bậc hai*

**3b) Khảo sát trong miền tần số**

- Hàm truyền tần số của khâu bậc hai :

$$G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{K}{-T^2\omega^2 + 2\xi Tj\omega + 1}$$

Tách phần thực và phần ảo ta được :

$$G(j\omega) = \frac{K(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4(\xi T\omega)^2} + j\frac{-2K\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4(\xi T\omega)^2} = \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega)$$

- Biên độ $A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)} = \dfrac{K}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4(\xi T\omega)^2}}$

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2T^2\omega^2}$$

- Pha $\varnothing(\omega) = \mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)} = -\mathrm{arctg}\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}$

Một số điểm đặc biệt :

$\omega = 0$ : $\mathrm{Re}(\omega) = K$ ; $\mathrm{Im}(\omega) = 0$ ; $L(\omega) = 20\lg K$ ; $\varnothing(\omega) = 0$

$\omega = \omega_n = 1/T$ : $\mathrm{Re}(\omega) = 0$ ; $\mathrm{Im}(\omega) = -K/2\xi$ ; $L(\omega) = 20\lg(K/2\xi)$ ; $\varnothing(\omega) = -90°$

$\omega = \infty$ : $\mathrm{Re}(\omega) = 0$ ; $\mathrm{Im}(\omega) = 0$ ; $A(\omega) = 0$ ; $L(\omega) = -\infty$ ; $\varnothing(\omega) = -180°$

Tại tần số $\omega_{ch} = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$ thì đạo hàm $dA/d\omega = 0$ nên biên độ đạt cực đại $A_{max} = A(\omega_{ch}) = K/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})$. Tần số $\omega_{ch}$ được gọi là tần số cộng hưởng và chỉ tồn tại khi $1-2\xi^2 > 0$ hay $0 \le \xi < 0,707$. Nếu $\xi$ càng nhỏ thì đỉnh cộng hưởng $A_{max}$ và $L(\omega_{ch})$ càng cao. Khi $\xi \to 0$ thì $\omega_{ch} \to \omega_n$ và $A_{max} \to \infty$, $L(\omega_{ch}) \to \infty$. Mối quan hệ giữa $A_{max}$ và $\xi$ được biểu diễn bằng đồ thị trên hình 3.14.

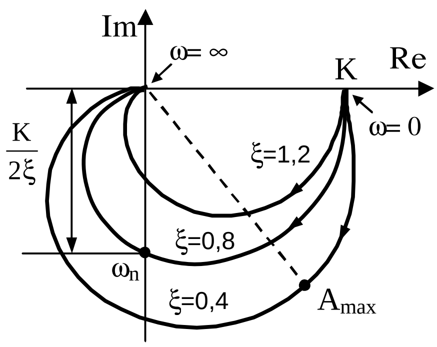
Biểu đồ Nyquist và biểu đồ Bode của khâu bậc hai ứng với các giá trị $\xi$ khác nhau được biểu diễn trên hình 3.12 và 3.13.

Với $0,38 \le \xi \le 0,707$, biểu đồ Bode biên độ của khâu bậc hai có thể vẽ gần đúng bằng hai đường tiệm cận :

§ Khi $\omega << 1/T \Leftrightarrow \omega T << 1$ thì $L(\omega) \approx 20\lg K \Rightarrow$ đường tiệm cận nằm ngang.

§ Khi $\omega >> 1/T \Leftrightarrow \omega T >> 1$ thì $L(\omega) \approx 20\lg K - 20\lg\sqrt{(-\omega^2T^2)^2} = 20\lg K - 40\lg(\omega T)$
$\Rightarrow$ đường tiệm cận có độ dốc $-40$ dB/dec.

Hai đường tiệm cận giao nhau tại tần số $\omega_n = 1/T$ nên với khâu bậc hai, tần số dao động riêng $\omega_n$ cũng là tần số gãy.

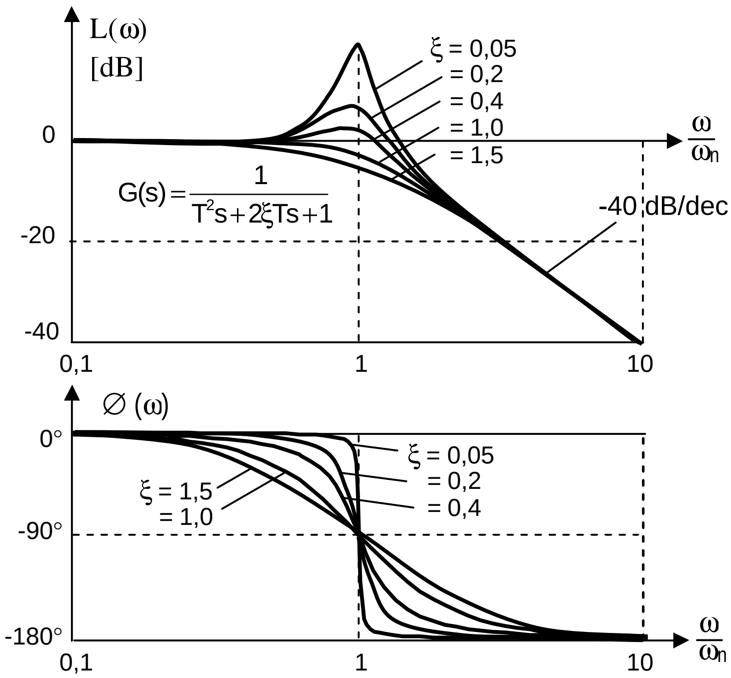



*Hình 3.12*

*Biểu đồ Nyquist của khâu bậc 2*

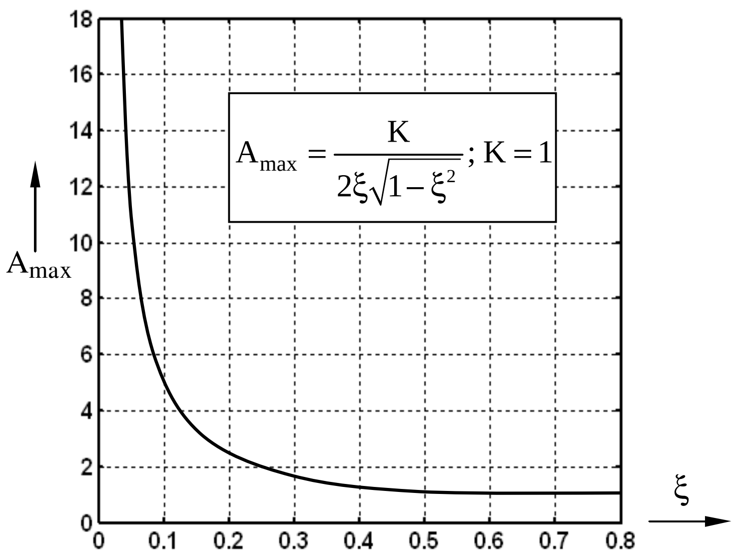
$0 < \xi < 0{,}707 \;\Rightarrow\; A_{max} > K$

$\xi \geq 0{,}707 \;\Rightarrow\; A_{max} = K$




*Hình 3.13*

*Biểu đồ Bode của khâu bậc 2*




***Hình 3.14***

*Mối quan hệ giữa $A_{max}$ và x của khâu dao động bậc hai*

***Nhận xét:***

Hệ số tắt dần $\xi$ càng bé thì mức dao động trên biểu đồ hàm quá độ càng lớn, giá trị biên độ cộng hưởng $A_{\mathbf{max}}$ trên biểu đồ Nyquist và $L(\omega_{ch})$ trên biểu đồ Bode càng cao.

**4) Khâu tích phân lý tưởng (khâu I )**

§ Hàm truyền :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s} = \frac{1}{T.s}$$

K gọi là hệ số khuếch đại hay hệ số tích phân, [$sec^{-1}$]

T = 1/K gọi là hằng số thời gian tích phân, [sec]

§ Ví dụ : hệ van nước-bể chứa, phần tử giảm chấn (ma sát nhớt), bộ truyền vitme-đai ốc, bộ servo thuỷ lực với phụ tải nhỏ,...

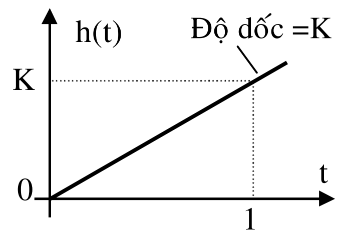
§ Đặc tính thời gian :

- Hàm quá độ

$$h(t) = K\int 1(t)dt = Kt.1(t)$$

- Hàm trọng lượng

$$g(t) = dh/dt = K.1(t)$$




***Hình 3.15***
*Hàm quá độ*
*của khâu tích phân (I)*

§ Đặc tính tần số :

- Hàm tần số $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = -j\frac{K}{\omega}$

$\Rightarrow$ Re(ω) =0 ; Im(ω) = –K/ ω

- Biên độ $A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K}{\omega}$

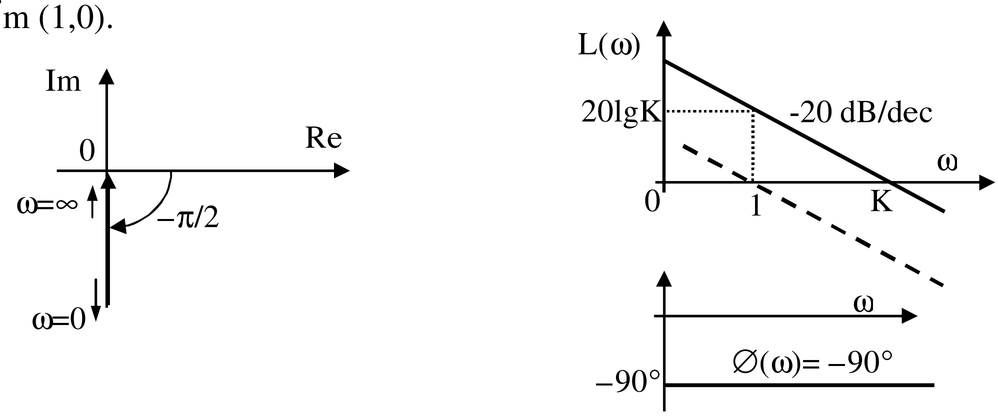
$\Rightarrow$ Khi ω =0 biên độ A(ω)= ∞
Khi ω =∞ biên độ A(ω)= 0

- Góc pha $\varnothing(\omega) = \text{arctg}\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} = \text{arctg}(-\infty) = -\pi/2$

$\Rightarrow$ Tín hiệu ra của khâu tích phân lý tưởng luôn chậm pha so với tín hiệu vào một góc bằng π /2. Biểu đồ Nyquist là nửa trục ảo âm.

- Biên độ lôgarit L(ω) = 20lgA(ω) = 20lg(K/ω)= 20lgK–20 lgω

Do trục hoành được chia theo thang lgω nên biểu đồ Bode biên độ là đường thẳng có độ dốc –20 dB/dec và đi qua điểm có toạ độ (1,20lgK); nếu K=1 thì L( ω) đi qua điểm (1,0).




***Hình 3.16***
*Biểu đồ Nyquist và biểu đồ Bode của khâu tích phân*

### 5) Khâu tích phân- quán tính bậc nhất (khâu $IT_1$)

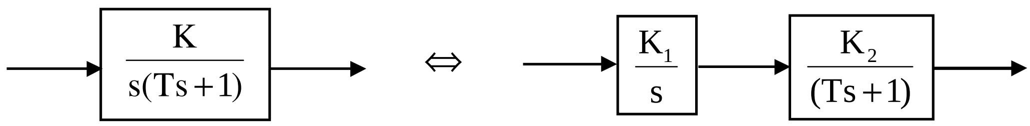
§ Hàm truyền :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

Trong đó: K là hệ số tích phân

T là hằng số thời gian

Từ biểu thức hàm truyền, ta thấy khâu $IT_1$ tương đương với khâu I và khâu $PT_1$ ghép nối tiếp.



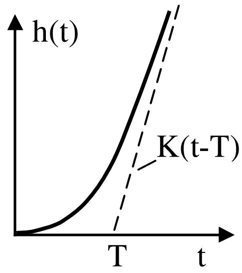

§ Đặc tính thời gian

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{K}{s^2(Ts+1)} = K\left[\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+1/T}\right]$$

$$h(t) = K[t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})]$$

Khi $t \to \infty$ thì $e^{-\frac{t}{T}} \to 0$.

Do đó h(t) có một đường tiệm cận là K(t-T)




***Hình 3.17***

*Hàm quá độ khâu $IT_1$*

§ Đặc tính tần số

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)} = \frac{K}{\omega(-T\omega+j)} = -\frac{KT}{T^2\omega^2+1} - j\frac{K}{\omega(T^2\omega^2+1)}$$

Phần thực $\quad Re(\omega) = \frac{-KT}{T^2\omega^2+1}$

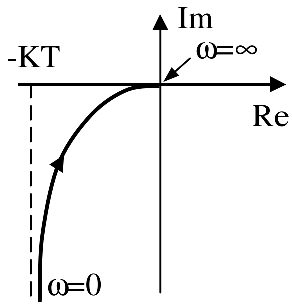
Phần ảo $\quad Im(\omega) = \frac{-K}{\omega(T^2\omega^2+1)}$

Đoạn tần số thấp:

$\lim\limits_{\omega\to 0} G(j\omega) = \text{-KT-j}\infty$ nên $A(\omega)=\infty$, $\varnothing(\omega)=-90°$

Đoạn tần số cao:

$\lim\limits_{\omega\to\infty} G(j\omega) = \text{-0-j0}$ nên $A(\omega)=0$, $\varnothing(\omega)=-180°$

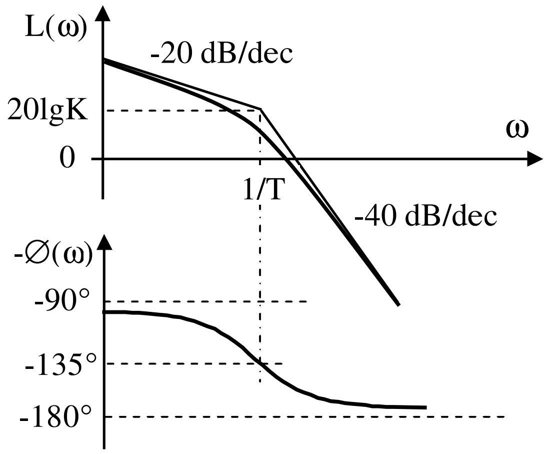



***Hình 3.18***

*Biểu đồ Nyquist khâu $IT_1$*

Þ Đường Nyquist tiệm cận với đường thẳng đứng đi qua điểm (-KT,j0).

Các đại lượng $L(\omega)$ và $\varnothing(\omega)$ trên biểu đồ Bode của khâu $IT_1$ có thể xác định bằng cách cộng các đại lượng tương ứng của hai khâu I và $PT_1$. Đường cong $L(\omega)$ chính xác có thể thay thế bằng 2 tiệm cận có độ dốc lần lượt là -20 và -40 dB/dec, giao nhau tại tần số gãy $\omega_C = 1/T$ (hình 3.19).




***Hình 3.19*** *Biểu đồ Bode của khâu $IT_1$*

### 6) Khâu vi phân lý tưởng (khâu D)

- Hàm truyền : $G(s) = Ks$
- Đặc tính thời gian:

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{Ks}{s} = K$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = K\delta(t)$$

- Đặc tính tần số:

$G(j\omega) = Kj\omega$

$Re(\omega)=0$ ; $A(\omega)= Im(\omega)= K\omega$ ;

$\varnothing(\omega) = \mathrm{arctg}(K\omega/0) = 90°$

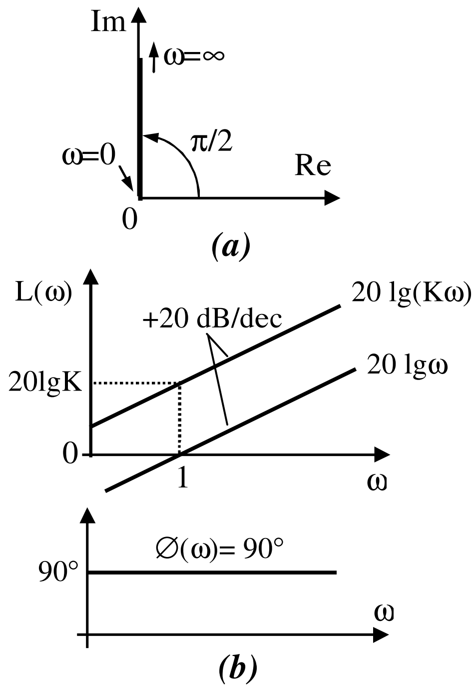
Khi $\omega \to\infty$ thì $A(\omega)\to\infty$

Biểu đồ Nyquist là nửa trục ảo dương như trên hình 3.20a. Tín hiệu ra của khâu D luôn ***sớm pha*** hơn tín hiệu vào một góc bằng 90 °

$L(\omega)=20\lg(K\omega)$

Nếu K=1 thì $L(\omega)=20\lg(\omega)$

Biểu đồ Bode ứng với K>1 và K=1 được vẽ trên hình 3.20b.




***Hình 3.20***

*a) Biểu đồ Nyquist của khâu D*

*b) Biểu đồ Bode của khâu D*

### 7) Khâu vi phân bậc 1

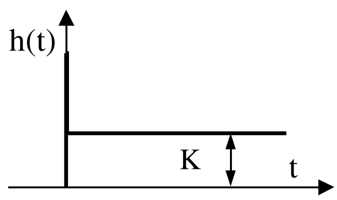
§ Hàm truyền : $G(s) = K(Ts+1)$

Như vậy khâu vi phân bậc một chính là tổ hợp ghép song song của khâu vi phân lý tưởng $G_1(s)= KTs$ và khâu tỉ lệ $G_2(s)=K$.

§ Đặc tính thời gian:

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{K(Ts+1)}{s} = KT + \frac{K}{s}$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = KT.\delta(t) + K.1(t)$$



§ Đặc tính tần số :

$G(j\omega) = K(Tj\omega + 1)$

$Re(\omega)= K$;  $Im(\omega)= KT\omega$

$\Rightarrow$ Biểu đồ Nyquist là nửa đường thẳng song song với trục ảo (hình 3.21)

Biên độ $A(\omega) = \sqrt{K^2 + K^2T^2\omega^2} = K\sqrt{T^2\omega^2 + 1}$

- Khi $\omega = 0$ biên độ $A(\omega)= K$
- Khi $\omega = \infty$ biên độ $A(\omega)= \infty$

Biên độ Logarit $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K + 20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1}$

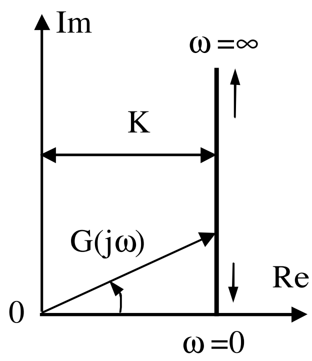
- Khi $\omega^2T^2 << 1$, tức là $\omega << 1/T$ thì $L(\omega) = 20\lg K \Rightarrow$ tiệm cận ngang.
- Khi $\omega^2T^2 >> 1$, tức là $\omega >> 1/T$ thì $L(\omega) = 20\lg K + 20\lg\omega T$

  $\Rightarrow$ đường tiệm cận xiên có độ dốc +20 dB/dec.

Góc pha $\varnothing(\omega) = \text{arctg}\dfrac{Im(\omega)}{Re(\omega)} = \text{arctg}\dfrac{K\omega T}{K} = \text{arctg}(\omega T)$

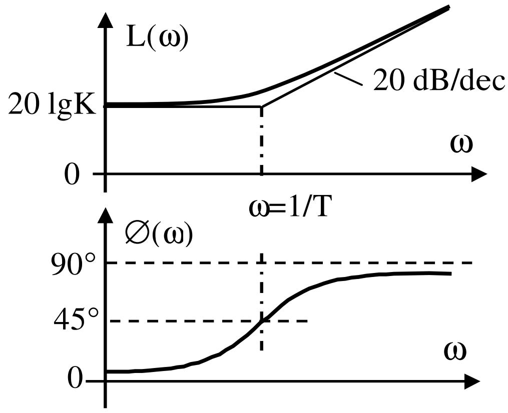
Khi $\omega = 0$ thì $\varnothing(\omega) = 0$ ; Khi $\omega \to \infty$ thì $\varnothing(\omega) = \pi/2 = 90°$.

Biểu đồ Bode và các tiệm cận được vẽ trên hình 3.22. Tín hiệu ra luôn ***sớm pha*** hơn tín hiệu vào một góc từ 0 đến 90 °.




***Hình 3.21***

*Biểu đồ Nyquist của khâu vi phân bậc 1*




***Hình 3.22***

*Biểu đồ Bode của khâu vi phân bậc 1*

**8) Khâu trễ**

Khâu trễ (khâu chậm trễ) là khâu động học mà sau một khoảng thời gian xác định, lượng ra lặp lại lượng vào mà không bị méo tín hiệu.

§ Ví dụ : băng tải vận chuyển (tín hiệu vào, ra là lưu lượng vật liệu), đường ống dẫn nhiệt (tín hiệu vào, ra là nhiệt lượng), đường ống dẫn khí nén (tín hiệu vào, ra là áp suất) là các khâu trễ nếu bỏ qua các tổn thất trên đường truyền.

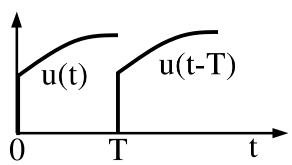
§ Mô tả toán :

Làm trễ hàm tín hiệu vào u(t) một khoảng thời gian T ta được tín hiệu ra:

$y(t) = u(t-T)$

Biến đổi Laplace hàm trễ ta được:

$Y(s) = L[u(t-T)] = e^{-Ts}\, U(s)$

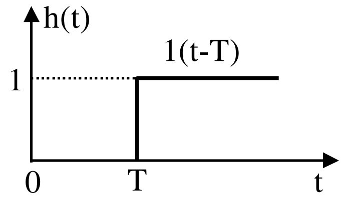


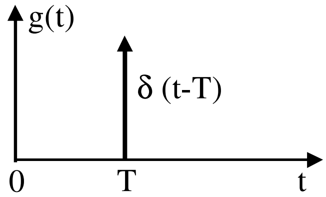
$\Rightarrow$ Hàm truyền : $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = e^{-Ts}$

§ Đặc tính thời gian:

Hàm quá độ : $h(t) = 1(t-T)$

Hàm trọng lượng : $g(t) = dh/dt = \delta(t-T)$



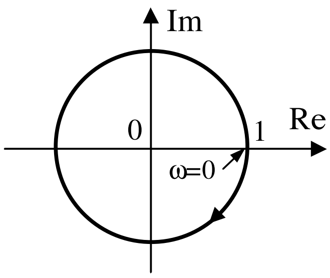

***Hình 3.23*** *Hàm quá độ và hàm trọng lượng của khâu trễ*

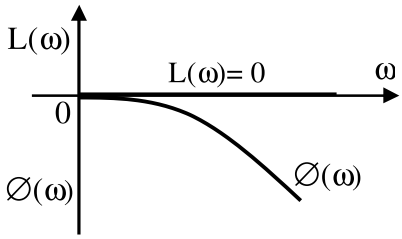
§ Đặc tính tần số :

- Hàm truyền tần số $G(j\omega) = e^{-j\omega T} = \cos\omega T - j\sin\omega T$
- Biên độ $A(\omega) = \sqrt{(\cos\omega T)^2 + (-\sin\omega T)^2} = 1$
- Biên độ lôgarit $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg(1) = 0$ dB
- Góc pha $\varnothing(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\sin\omega T}{\cos\omega T}\right) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\omega T) = -\omega T$

Biên độ luôn bằng 1 và góc pha thay đổi tuyến tính theo $\omega$ nên biểu đồ Nyquist là đường tròn đơn vị.

$L(\omega)$ luôn bằng 0 nên biểu đồ Bode biên độ trùng với trục hoành. Hàm góc pha $\varnothing(\omega)$ tỉ lệ với $\omega$ nhưng do trục hoành $\omega$ chia theo thang lôgarit nên biểu đồ Bode pha $\varnothing(\omega) = -\omega T$ là đường cong.




***Hình 3.24*** *Biểu đồ Nyquist và biểu đồ Bode của khâu trễ*

Các giá trị đặc biệt :

$\lim\limits_{\omega\to 0} \operatorname{Re}(\omega) = 1$ ; $\lim\limits_{\omega\to 0} \operatorname{Im}(\omega) = 0$ ; góc pha $\varnothing(0) = 0$

$\lim\limits_{\omega\to\infty} \operatorname{Re}(\omega)$ và $\lim\limits_{\omega\to\infty} \operatorname{Im}(\omega)$ : không tồn tại

### 9) Đối tượng điều khiển có trễ

Đối tượng điều khiển có trễ được mô tả bằng hàm truyền :

$$G_h(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-Ts}$$

Tương ứng với sơ đồ khối: $\xrightarrow{u(t)} \boxed{G(s)} \longrightarrow \boxed{e^{-Ts}} \xrightarrow{y(t)}$

Trong đó G(s) là hàm truyền của thành phần không trễ

§ Đặc tính thời gian

Nếu xác định được hàm quá độ h(t) của thành phần không trễ thì hàm quá độ của đối tượng có trễ sẽ là h(t-T).

Với hàm trọng lượng ta cũng có kết quả tương tự.

§ Đặc tính tần số

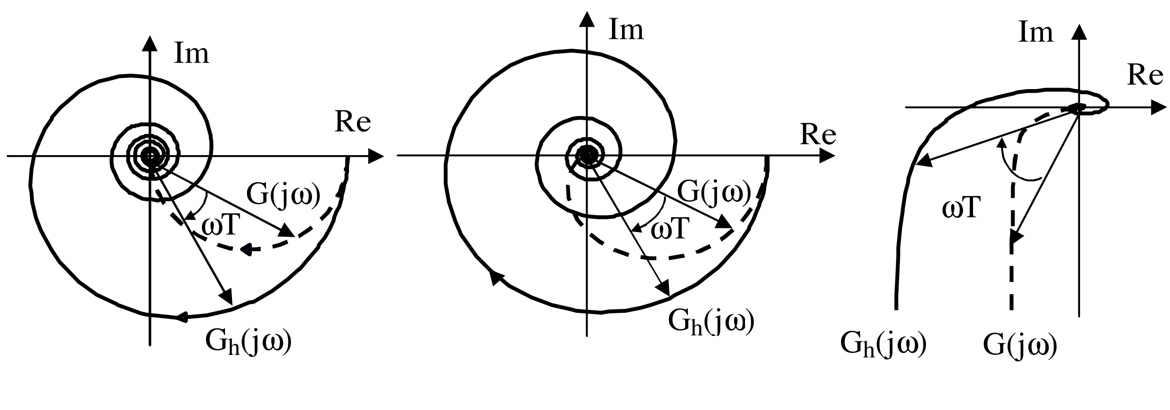
Hàm truyền tần số $G_h(j\omega) = G(j\omega)e^{-j\omega T} = A(\omega)e^{j\omega}e^{-j\omega T}$

Biên độ $A_h(\omega) = A(\omega) = |G(j\omega)|$

Góc pha $\varnothing_h(\omega) = \varnothing(\omega) - \omega T$

Như vậy, khi có thêm khâu trễ thì biên độ A( ω) và L(ω ) không thay đổi mà chỉ thêm góc lệch pha -ωT.

Nếu ta biết biểu đồ Nyquist của phần không chậm trễ thì ta có thể xây dựng được biểu đồ Nyquist của đối tượng có trễ. Để làm điều đó ta chỉ việc quay vectơ $G(j\omega_i)$ đi một góc $\omega_i T$ theo chiều kim đồng hồ. Lấy nhiều điểm $\omega_i$ ta sẽ vẽ được toàn bộ đường $G_h(j\omega)$. Khi tần số tăng lên thì $\omega_i T$ cũng tăng trong khi biên độ ở tần số cao lại giảm về 0 nên biểu đồ Nyquist có dạng đường xoắn ốc.



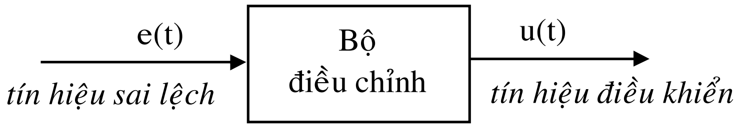

a) $\dfrac{K}{T_1 s + 1} e^{-Ts}$ b) $\dfrac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-Ts}$ c) $\dfrac{K}{s(T_1 s + 1)} e^{-Ts}$

***Hình 3.25*** *Biểu đồ Nyquist của các đối tượng có trễ*

## 3.4 Đặc tính động học của các bộ điều chỉnh

Bộ điều chỉnh (hay khâu hiệu chỉnh) chính là các bộ điều khiển đơn giản được sử dụng để biến đổi hàm truyền của hệ thống nhằm cải thiện đặc tính động học của hệ, làm cho hệ thống có đáp ứng thoả mãn các yêu cầu chất lượng định trước.

Tín hiệu vào của bộ điều chỉnh là tín hiệu sai lệch e(t) và tín hiệu ra của bộ điều chỉnh là tín hiệu điều khiển u(t). Sơ đồ khối tổng quát của các bộ điều chỉnh có thể biểu diễn đơn giản như hình vẽ :




Theo loại tín hiệu làm việc người ta chia thành ba loại chính là bộ điều chỉnh liên tục, bộ điều chỉnh on-off (hai vị trí, ba vị trí,...) và bộ điều chỉnh số. Bộ điều chỉnh liên tục có thể thực hiện bằng các cơ cấu cơ khí, thiết bị khí nén, mạch điện RC, mạch khuếch đại thuật toán. Bộ điều chỉnh on-off thường được thực hiện bằng các mạch rơle điện từ, rơle khí nén, chương trình PLC. Bộ điều chỉnh số được thực hiện bằng các chương trình phần mềm chạy trên vi xử lý hay máy tính PC.

Nội dung phần này giới thiệu các bộ điều chỉnh liên tục điển hình bao gồm bộ P, I, PI, PD, PID. Trong thực tế, các hãng sản xuất thiết bị tự động thường cung cấp các bộ điều chỉnh PID thương mại chế tạo bằng mạch khuếch đại thuật toán. Các bộ PID được thiết kế chế tạo sẵn này rất tiện dụng. Người sử dụng có thể chọn chế độ điều khiển P, I, PI, PD, PID tuỳ theo yêu cầu bằng cách tất mở các thành phần chức năng tương ứng.

### 1) Bộ điều chỉnh tỉ lệ (bộ P)

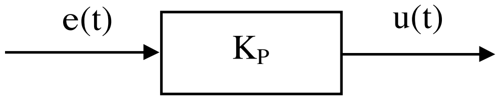
Bộ điều chỉnh tỉ lệ tạo tín hiệu điều khiển u(t) tỉ lệ với tín hiệu sai lệch e(t).

- Phương trình vi phân: $u(t) = K_P . e(t)$

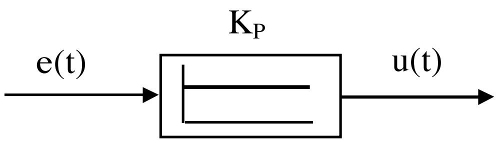
Trong đó : $K_P$ gọi là hệ số khuếch đại

- Hàm truyền : $G_P(s) = K_P$
- Hàm tần số : $G(j\omega) = K_P$
- Đặc tính thời gian và đặc tính tần số tương tự như ĐTĐK loại P
- Ký hiệu bộ điều chỉnh P : Bên cạnh cách ghi hàm truyền, người ta còn dùng cách đặt đồ thị hàm quá độ vào trong sơ đồ khối để thể hiện trực quan đặc tính động học như các hình vẽ dưới đây:

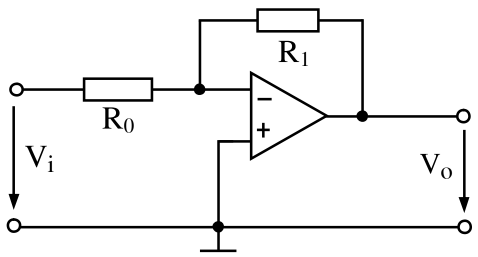
<u>Cách 1:</u>




<u>Cách 2:</u>



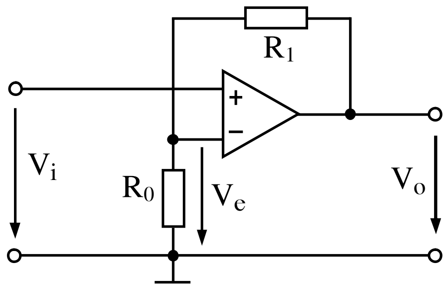
- Bộ P bằng khuếch đại thuật toán :




Bộ P kiểu đảo

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = K_P$$

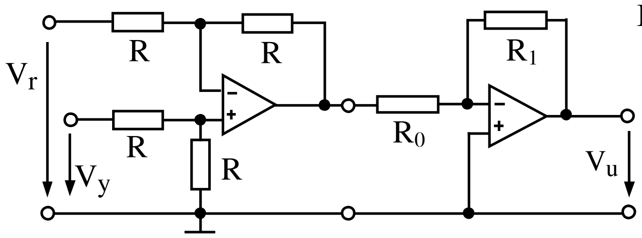
$$K_p = -\frac{R_1}{R_0}$$




Bộ P kiểu không đảo

$$G(s) = K_p$$

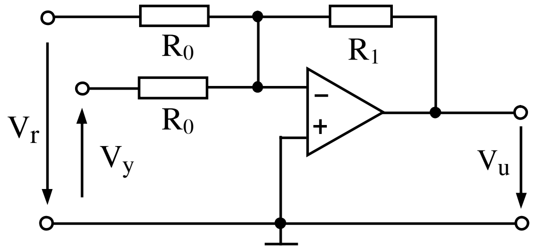
$$K_p = 1 + \frac{R_1}{R_0}$$




Bộ P kết hợp bộ so điện áp

$$G(s) = \frac{V_u}{V_r - V_y} = K_p$$

$$K_p = \frac{R_1}{R_0}$$




Bộ P kết hợp bộ so dòng điện

$$G(s) = K_p$$

$$K_p = -\frac{R_1}{R_0}$$

## 2) Bộ điều chỉnh tích phân (bộ I)

Bộ điều chỉnh tích phân tạo nên tín hiệu điều khiển u(t) tỉ lệ với tích phân của tín hiệu sai lệch e(t).

§ Phương trình vi phân : $u(t) = K_I \int e(t)dt$

§ Hàm truyền : $G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{T_I.s}$

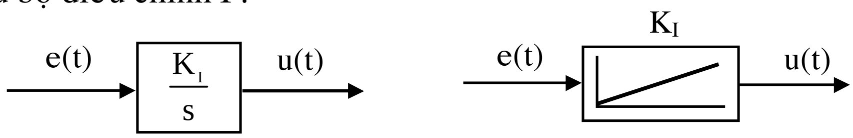
Trong đó:

$K_I$ : hằng số tích phân

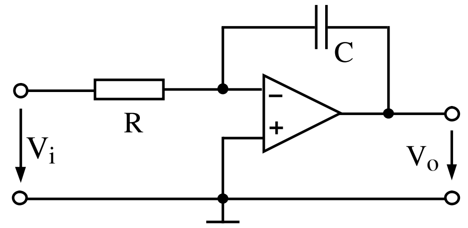
$T_I = \frac{1}{K_I}$ : hằng số thời gian tích phân

§ Đặc tính thời gian và đặc tính tần số tương tự như ĐTĐK dạng tích phân.

§ Ký hiệu bộ điều chỉnh I :



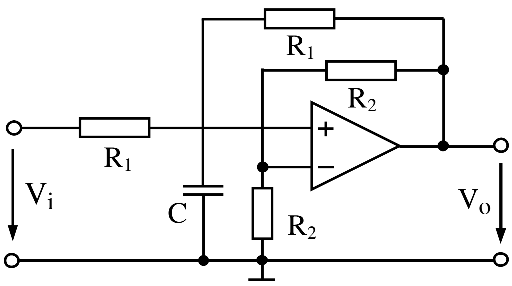

§ Bộ I bằng khuếch đại thuật toán:




Bộ I kiểu đảo

$$G(s) = \frac{K_I}{s}$$

$$K_I = -\frac{1}{RC}$$




Bộ I kiểu không đảo

$$G(s) = \frac{K_I}{s}$$

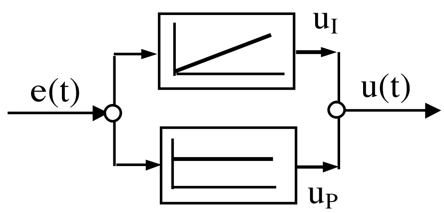
$$K_I = \frac{2}{R_1C}$$

**3) Bộ điều chỉnh tỉ lệ- tích phân (bộ PI)**

Bộ điều chỉnh PI là cấu trúc ghép song song của khâu P và khâu I. Tín hiệu ra của bộ PI là tổng tín hiệu ra của hai khâu thành phần.

§ Phương trình vi phân :

$$u(t)=K_P.e(t) + K_I\int e(t)dt$$




§ Hàm truyền :

$$G_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$$

Hoặc:

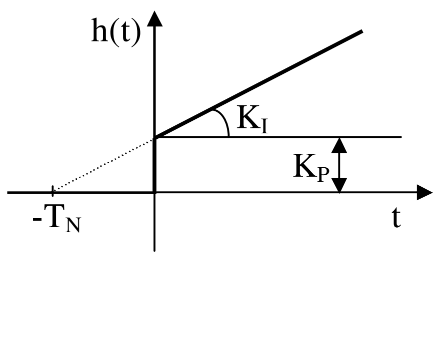
$$G_{PI}(s) = K_P\frac{1+T_N.s}{T_N.s} = K_P\left(1+\frac{1}{sT_N}\right)$$

Trong đó :

$T_N = \frac{K_P}{K_I}$ gọi là thời gian hiệu chỉnh hay thời gian tác động trễ

§ Đặc tính thời gian :

$$h(t) = K_P + K_I.t = K_P\left(1+\frac{t}{T_N}\right)$$



§ Hàm tần số : $G(j\omega) = K_P - j\dfrac{K_I}{\omega} = K_P\left(1 - j\dfrac{1}{T_N\omega}\right)$

Phần thực: $Re(\omega) = K_P$

Phần ảo: $Im(\omega) = -\dfrac{K_I}{\omega} = -\dfrac{K_P}{T_N.\omega}$

Góc pha: $\varnothing(\omega) = \text{arctg}\dfrac{Im(\omega)}{Re(\omega)} = -\text{arctg}\dfrac{K_I}{K_P\omega} = -\text{arctg}\dfrac{1}{T_N\omega}$

Khi $\omega = 0$ thì $\varnothing(\omega) = -\pi/2$

Khi $\omega = \infty$ thì $\varnothing(\omega) = 0$

⇒ Tín hiệu ra luôn ***trễ pha*** hơn tín hiệu vào một góc từ 0 đến $\pi/2$ tuỳ thuộc vào giá trị các tham số $K_P$, $K_I$ và tần số ω của tín hiệu vào. Do đó bộ PI được xếp vào loại điều chỉnh trễ pha. Mặt khác, bộ PI còn có tính chất của một bộ lọc thông thấp : chỉ cho tín hiệu vào tần số thấp đi qua, tín hiệu tần số cao nhanh chóng bị suy giảm.

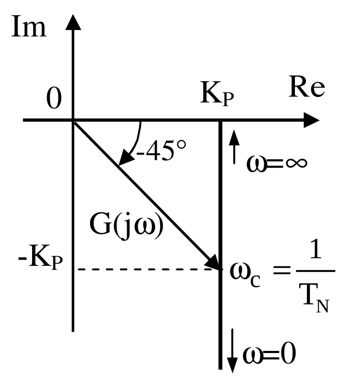
Biểu đồ Nyquist của bộ PI như hình 3.26

Biên độ: $A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} = \dfrac{K_P}{\omega.T_N}\sqrt{1 + (\omega.T_N)^2}$

Biên độ lôgarit: $L(\omega) = \lg K_P - \lg\omega T_N + \lg\sqrt{1 + (\omega T_N)^2}$

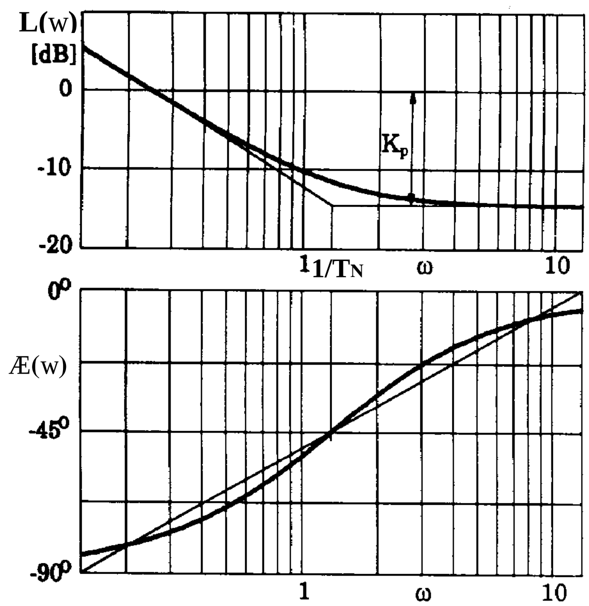
Góc pha: $\varnothing(\omega) = \text{arctg}\dfrac{Im(\omega)}{Re(\omega)} = -\text{arct g}\dfrac{1}{\omega T_N}$

Biểu đồ Bode của bộ PI được thể hiện trên hình 3.27.




***Hình 3.26***

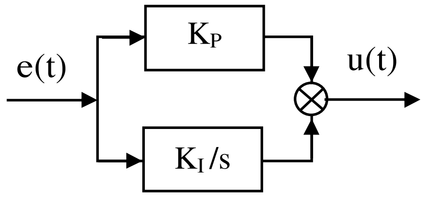
*Biểu đồ Nyquist của bộ PI*

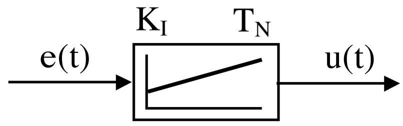



***Hình 3.27***

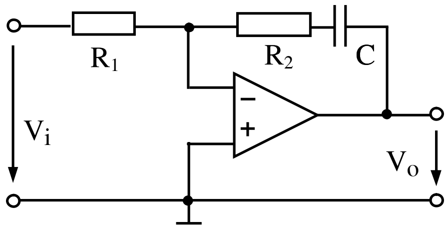
*Biểu đồ Bode của bộ PI*

Ký hiệu bộ PI :




§ Bộ PI bằng khuếch đại thuật toán :

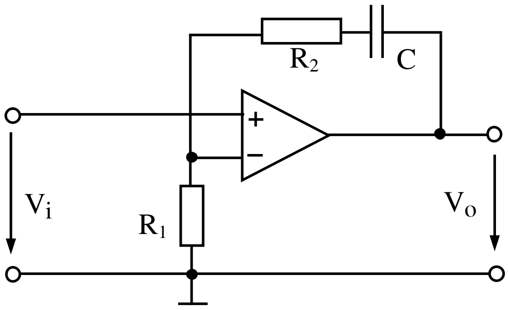



*Bộ PI kiểu đảo,1*

$$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \frac{sT_N + 1}{sT_N}$$

$$K_P = -\frac{R_2}{R_1}; K_I = -\frac{1}{R_1 C}$$

$$T_N = R_2 C$$

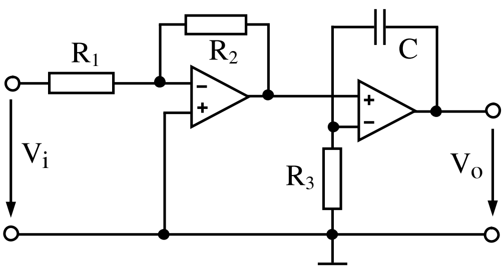



*Bộ PI kiểu đảo,2*

$$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \frac{T_N.s + 1}{T_N.s}$$

$$K_P = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$T_N = (R_1 + R_2).C$$




*Bộ PI kiểu đảo, các thông số điều chỉnh độc lập*

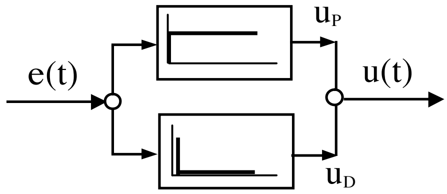
$$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \frac{sT_N + 1}{sT_N}$$

$$K_P = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$T_N = \frac{K_P}{K_I} = R_3 C$$

### 4) Bộ điều chỉnh tỉ lệ- vi phân (bộ PD)

Bộ điều chỉnh PD lý tưởng là cấu trúc ghép song song của khâu P và khâu D. Tín hiệu ra của bộ PD là tổng tín hiệu ra của hai khâu thành phần.




§ Phương trình vi phân :

$$u(t) = K_P e(t) + K_D.\frac{de(t)}{dt} = K_P.\left[e(t) + T_V.\frac{de(t)}{dt}\right]$$

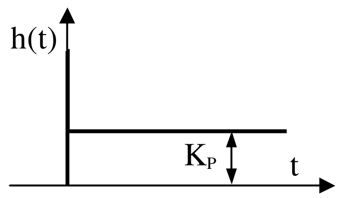
Trong đó $T_V = \frac{K_D}{K_P}$ gọi là thời gian tác động sớm (vượt sớm).

§ Hàm truyền :

$$G_{PD}(s) = K_P + K_D s$$

hoặc: $G_{PD}(s) = K_P(1 + T_V.s)$

§ Đặc tính thời gian:




$$H(s) = \frac{G_{PD}(s)}{s} = \frac{K_P + K_D s}{s} = K_D + \frac{K_P}{s}$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = K_D\delta(t) + K_P 1(t)$$

Ta thấy, ở trạng thái xác lập, bộ PD lý tưởng làm việc như bộ P. Ở trạng thái chuyển tiếp, nó làm việc như bộ D, tức là tín hiệu ra u(t) tỉ lệ với đạo hàm của tín hiệu vào e(t).

§ Đặc tính tần số :

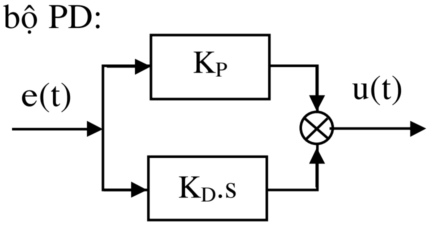
Hàm tần số : $G(j\omega) = K_P(1 + T_V.j\omega)$

Góc pha : Góc pha $\varnothing(\omega) = \text{arctg}(T_V.\omega)$

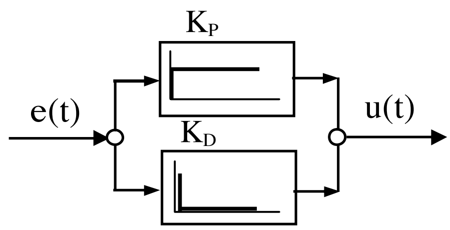
$\omega = 0$ thì $\varnothing(\omega) = 0$ còn khi $\omega = \infty$ thì $\varnothing(\omega) = \pi/2$

Đặc tính thời gian và đặc tính tần số của bộ PD tương tự đặc tính của ĐTĐK vi phân bậc 1 (xem trang 87, 88). Tín hiệu ra của bộ PD luôn ***sớm pha*** hơn tín hiệu vào một góc từ 0 đến $\pi/2$ tuỳ thuộc vào giá trị các tham số $K_P$, $K_D$ và tần số $\omega$ của tín hiệu vào. Do đó bộ PD được xếp vào loại điều chỉnh sớm pha. Mặt khác, bộ PD còn có tính chất của một bộ lọc thông cao: chỉ cho tín hiệu vào tần số cao đi qua, tín hiệu tần số thấp nhanh chóng bị suy giảm.

§ Ký hiệu bộ PD:

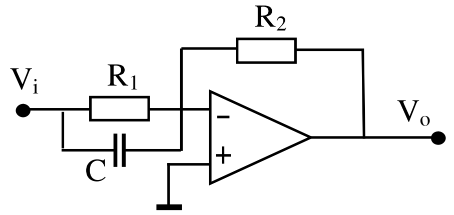



;



## § Bộ PD bằng khuếch đại thuật toán :

Bộ PD lý tưởng, kiểu đảo

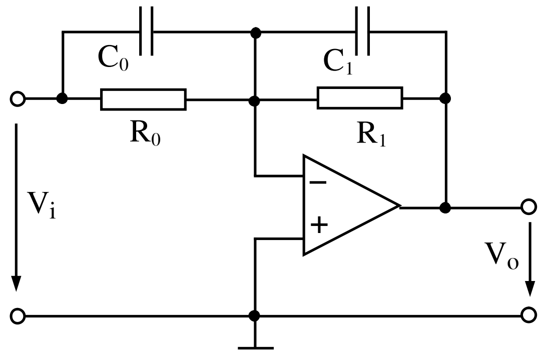



$$G(s) = K_P + K_D\, s$$

$$K_P = -\frac{K_2}{K_1};\ \ K_D = -R_2 C$$

Bộ PD/PDT1 kiểu đảo ( khâu sớm pha, $T_V > T_1$ )

Bộ $PPT_1$ kiểu đảo ( khâu trễ pha, $T_1 > T_V$ )

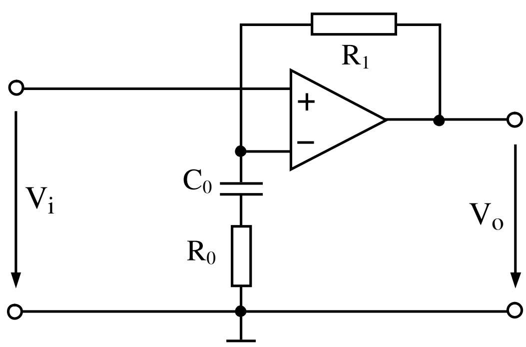



$$G(s) = K_p \frac{1 + s.T_V}{1 + s.T_1}$$

$$K_p = \frac{R_1}{R_0}$$

$$T_V = R_0 C_0$$

Bộ PD/PDT1 kiểu không đảo ( khâu sớm pha )



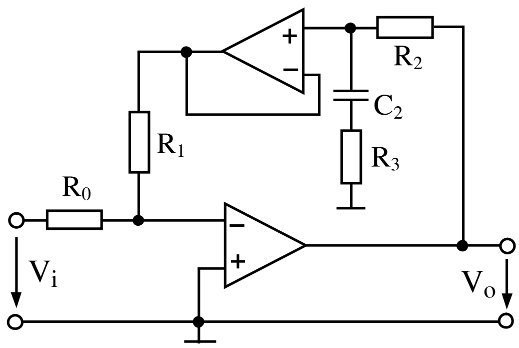

$$G(s) = K_p \frac{1 + s.T_V}{1 + s.T_1}$$

$$K_p = 1$$

$$T_V = (R_0 + R_1).C_0$$

$$T_1 = R_0 C_0$$

Bộ PD/PDT1 kiểu đảo ( sớm pha, các thông số điều chỉnh độc lập)




$$G(s) = K_p \frac{1 + s.T_V}{1 + s.T_1}$$

$$K_p = -\frac{R_1}{R_0}$$

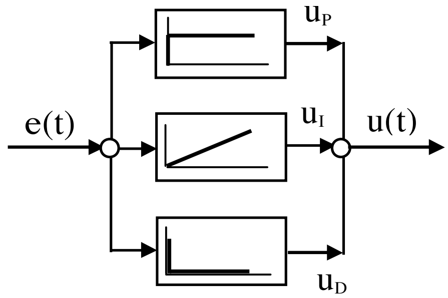
$$T_V = (R_2 + R_3).C_2$$

$$T_1 = R_3 C_2$$

### 5) Bộ điều chỉnh tỉ lệ- vi tích phân (bộ PID)

Bộ điều chỉnh PID lý tưởng là cấu trúc ghép song song của ba khâu: P, I và D.

- Phương trình vi phân của bộ PID lý tưởng :




$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t)dt + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

hay :

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{K_I}{K_P} \int e(t)dt + \frac{K_D}{K_P} \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Trong đó

$K_P$ là hệ số khuếch đại của bộ điều chỉnh PID.

$K_I$ là tốc độ tích phân hay hệ số tích phân ($s^{-1}$).

$K_D$ là hệ số vi phân hay hằng số thời gian vi phân (s ).

$\frac{K_I}{K_P} = \frac{1}{T_N}$ với $T_N$ gọi là thời gian hiệu chỉnh hay thời gian tác động trễ.

$\frac{K_D}{K_P} = T_V$ gọi là thời gian tác động sớm.

- Hàm truyền của bộ PID có thể biểu diễn theo nhiều cách :

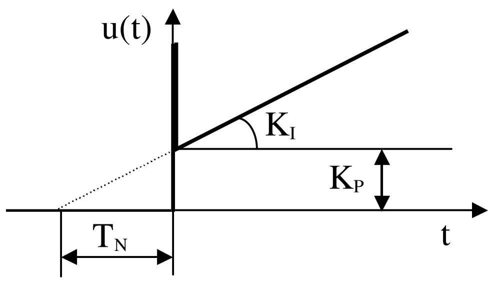
<u>Cách 1</u> : $$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

<u>Cách 2</u> : $$G(s) = K_P . \left[ 1 + \frac{1}{T_N .s} + T_V .s \right] = K_P \frac{1 + T_N .s + T_N .T_V .s^2}{T_N .s}$$

<u>Cách 3</u> : $$G(s) = K_R \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{s}$$

trong đó : $K_R = \frac{K_P}{T_N}$ ; $T_N = T_1 + T_2$ ; $T_N .T_V = T_1 + T_2$

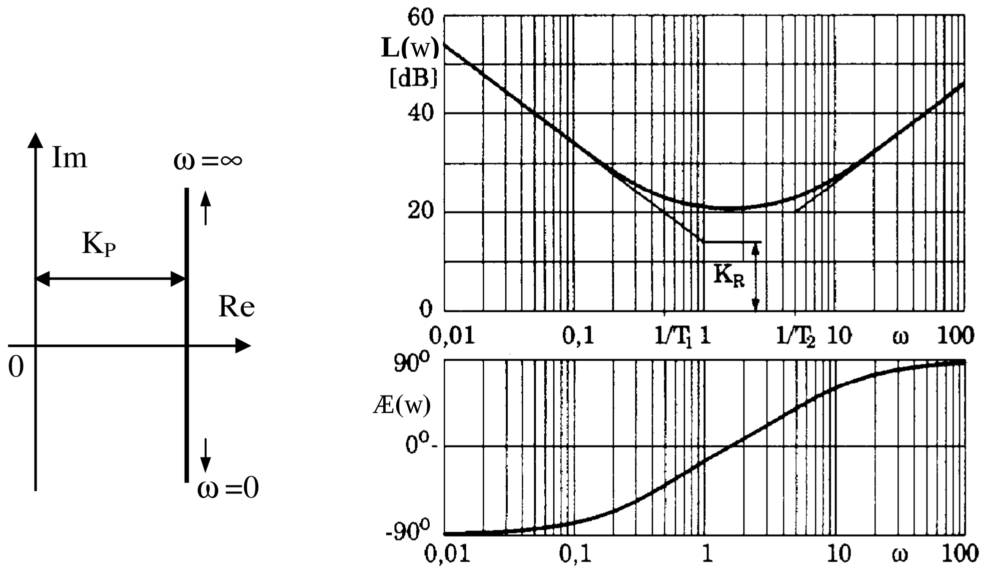
- Đặc tính quá độ :




***Hình 3.28*** *Đặc tính quá độ của bộ PID*

- Đặc tính tần số:

  Biểu đồ Nyquist và biểu đồ Bode của bộ PID được thể hiện trên hình 3.29




***Hình 3.29*** *Biểu đồ Nyquist và biểu đồ Bode của bộ PID*

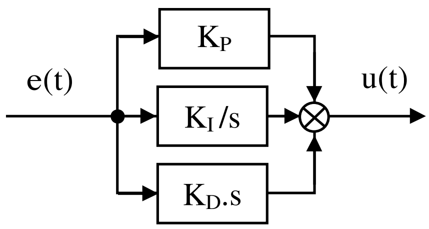
- Ưu điểm của bộ PID :

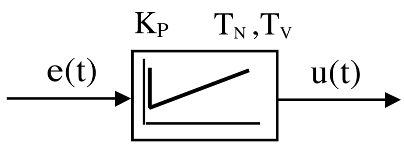
§ Nếu sai lệch e(t) càng lớn thì thông qua thành phần $u_P(t)$, tín hiệu điều khiển u(t) càng lớn (vai trò của khuếch đại $K_P$).

§ Nếu sai lệch e(t) chưa bằng 0 thì thông qua thành phần $u_I(t)$, PID vẫn còn tạo tín hiệu điều khiển (vai trò của tích phân $K_I$).

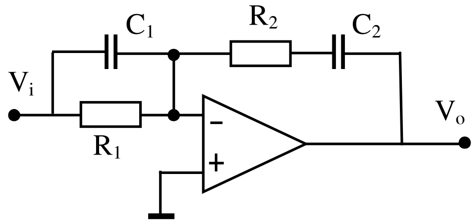
§ Nếu tốc độ thay đổi của sai lệch e(t) càng lớn thì thông qua thành phần $u_D(t)$, phản ứng thích hợp của u(t) sẽ càng nhanh (vai trò của vi phân $K_D$).

- Ký hiệu bộ PID :




- Bộ PID bằng khuếch đại thuật toán :

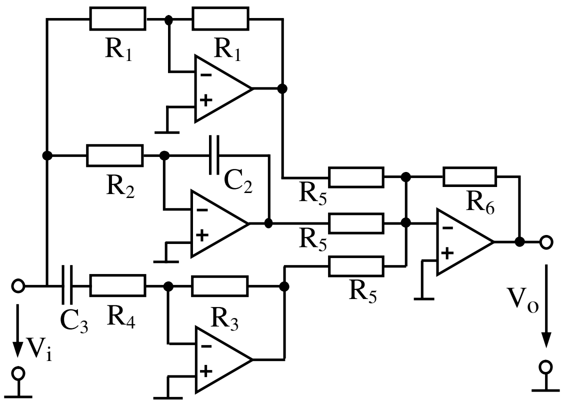



Hàm truyền :

$$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

trong đó:

$$K_P = -\frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1C_2}; \; K_I = -\frac{1}{R_1C_2}; \; K_D = -R_2C_1$$




*Bộ PID/PIDT$_1$ kiểu song song, không đảo, các thông số điều chỉnh độc lập*

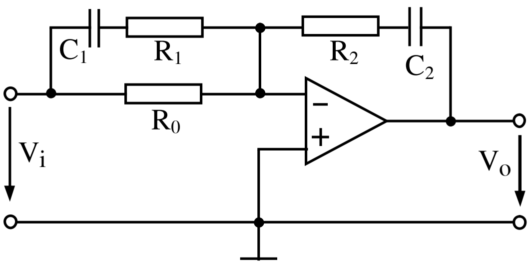
$$G(s) = K_P\left[1 + \frac{1}{s.T_N} + \frac{s.T_V}{1 + s.T_1}\right]$$

$$K_P = \frac{R_6}{R_5}$$

$$T_N = R_2C_2$$

$$T_V = R_3C_3$$

$$T_1 = R_4C_3$$




*Bộ PID/PIDT$_1$ kiểu nối tiếp, đảo*

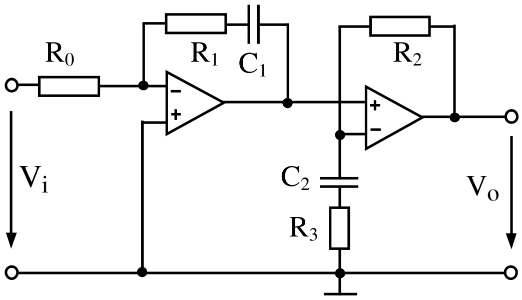
$$G(s) = K_P\left[\frac{(1+sT_N)(1+sT_V)}{sT_N(1+sT_1)}\right]$$

$$K_P = -\frac{R_2}{R_0}$$

$$T_N = R_2C_2$$

$$T_V = (R_0 + R_1).C_1$$

$$T_1 = R_1C_1$$




*Bộ PID/PIDT$_1$ kiểu nối tiếp, đảo*

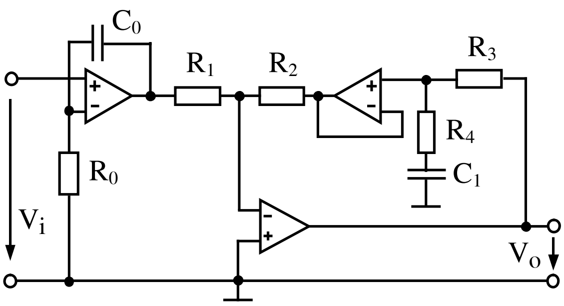
$$G(s) = K_P\left[\frac{(1+sT_N)(1+sT_V)}{sT_N(1+sT_1)}\right]$$

$$K_P = -\frac{R_1}{R_0}$$

$$T_N = R_1C_1$$

$$T_V = (R_2 + R_3).C_1$$

$$T_1 = R_3C_2$$




*Bộ PID/PIDT$_1$ kiểu nối tiếp, đảo*

$$G(s) = K_P\left[\frac{(1+sT_N)(1+sT_V)}{sT_N(1+sT_1)}\right]$$

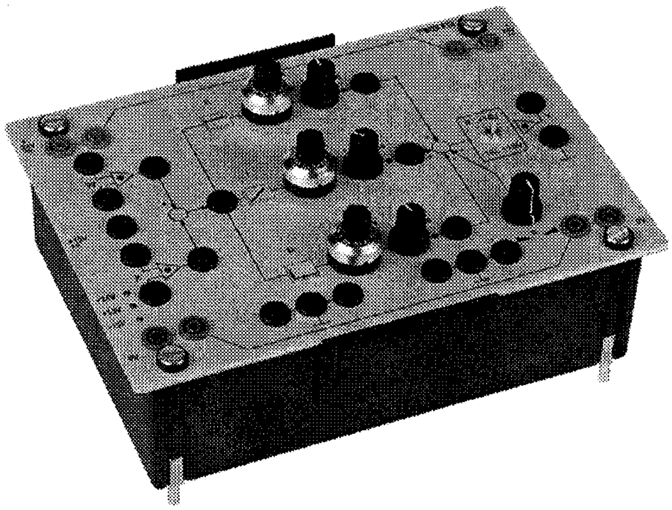
$$K_P = -\frac{R_2}{R_0}$$

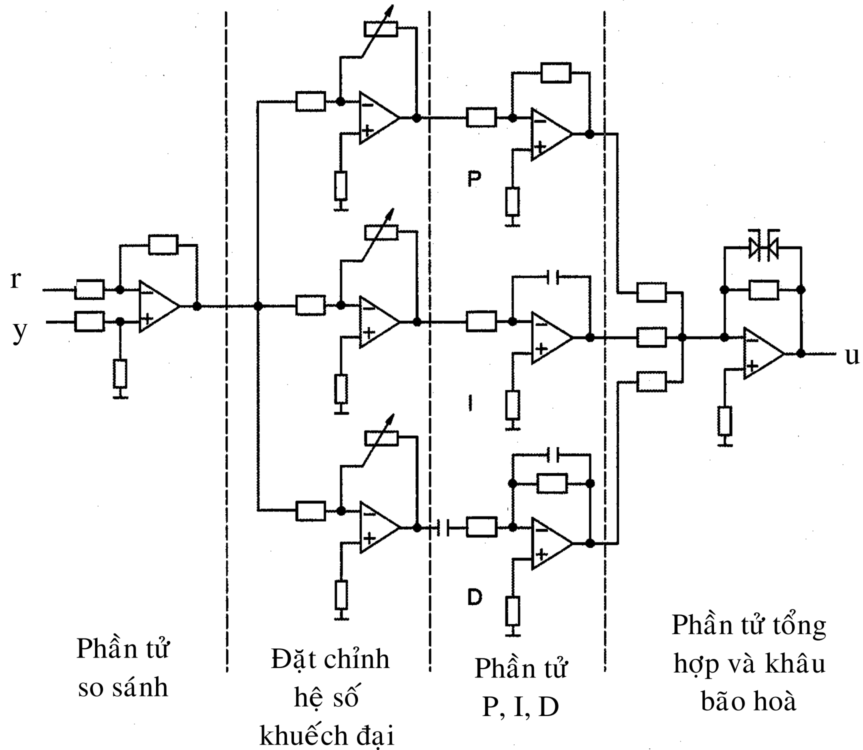
$$T_N = R_0C_0$$

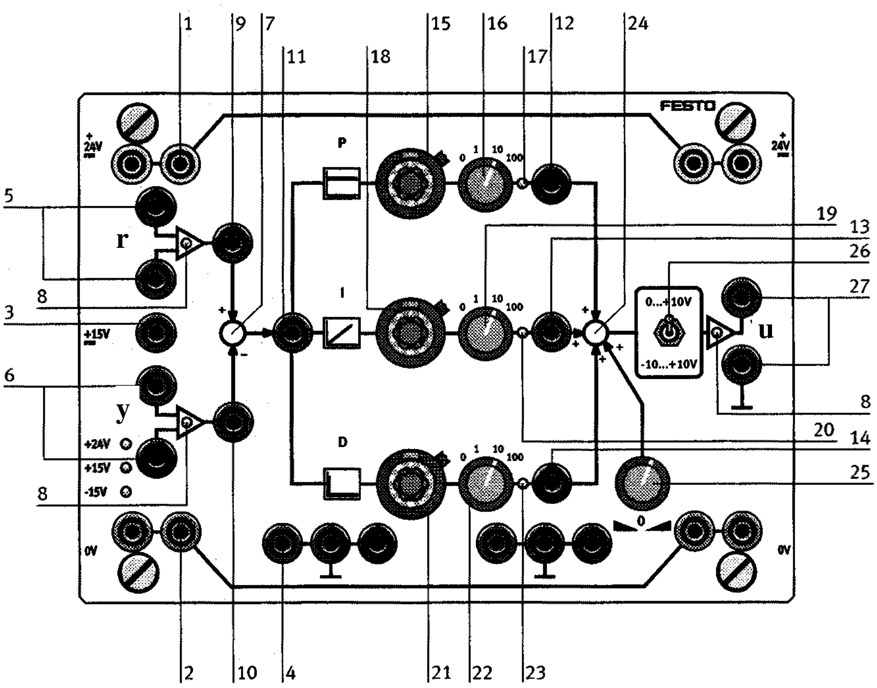
$$T_V = (R_3 + R_4).C_1$$

$$T_1 = R_4C_1$$

Dưới đây là hình dáng ngoài và sơ đồ cấu trúc một bộ điều chỉnh PID thực tế, được chế tạo bằng các mạch khuếch đại thuật toán. Cấu trúc bộ PID gồm 4 nhóm phần tử : nhóm phần tử so sánh tín hiệu vào/ra, nhóm phần tử đặt chỉnh hệ số khuếch đại, nhóm phần tử P-I-D, cuối cùng là nhóm mạch cộng tín hiệu và khâu bão hoà để giới hạn giải giá trị tín hiệu điều khiển u(t) xuất ra (0...10V hoặc -10 ...10V). Cấu trúc này cho phép điều chỉnh từng thông số $K_P$, $K_I$, $K_D$ của bộ PID một cách riêng biệt, độc lập.








| | |
|---|---|
| 1 | Nguồn 24V |
| 2 | Mass nguồn (0V) |
| 3 | Nguồn cấp cho cảm biến 15V |
| 4 | Mass nguồn của cảm biến (0V- analogue ground) |
| 5 | Ngõ vào tín hiệu vào chuẩn (giá trị đặt - setpoint) |
| 6 | Ngõ vào tín hiệu hồi tiếp(giá trị thực qua đo lường) . |
| 7 | Điểm so sánh (điểm tổng hợp các tín hiệu ngõ vào) |
| 8 | Đèn báo tín hiệu vào vượt mức giới hạn |
| 9 | Điểm đo kiểm tín hiệu vào chuẩn |
| 10 | Điểm đo kiểm tín hiệu hồi tiếp |
| 11 | Điểm đo kiểm tín hiệu độ sai lệch |
| 12 | Điểm đo kiểm ngõ ra tỉ lệ (P) |
| 13 | Điểm đo kiểm ngõ ra tích phân (I) |
| 14 | Điểm đo kiểm ngõ ra vi phân (D) |
| 15 | Nút xoay chỉnh tinh $K_P$ |
| 16 | Nút xoay chọn thô $K_P$ |
| 17 | Đèn chỉ báo có tín hiệu ngõ ra P |
| 18 | Nút xoay chỉnh tinh $K_I$ |
| 19 | Nút xoay chọn thô $K_I$ |
| 20 | Đèn chỉ báo có tín hiệu ngõ ra I |
| 21 | Nút xoay chỉnh tinh $K_D$ |
| 22 | Nút xoay chọn thô $K_D$ |
| 23 | Đèn chỉ báo có tín hiệu ngõ ra D |
| 24 | Điểm tổng hợp tín hiệu ra |
| 25 | Nút offset tín hiệu ra (tín hiệu điều khiển u ) |
| 26 | Nút chọn khoảng giới hạn bão hòa tín hiệu ra |
| 27 | Ngõ ra của bộ điều chỉnh (tín hiệu điều khiển u ) |

## 3.5 Đặc tính tần số của hệ thống tự động

Xét hệ thống điều khiển hở bao gồm nhiều khâu động học cơ bản mắc nối tiếp. Hàm truyền của hệ thống hở sẽ bằng tích các khâu động học thành phần và có thể biểu diễn ở dạng tổng quát :

$$G_h(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m_1} K_i \prod_{i=1}^{m_2} \left(T_{1i}s+1\right)}{s^N \prod_{i=1}^{n_1} \left(T_{2i}s+1\right) \prod_{i=1}^{n_2} \left(T_{3i}{}^2 s^2 + 2\xi T_{3i}s+1\right)}$$

Trong đó: $\prod_{i=1}^{m_1} K_i = K$ _là hệ số khuếch đại chung của hệ thống.

$T_{1i}, T_{2i}, T_{3i}$ _là các hằng số thời gian của các khâu.

$N + n_1 + n_2 = n$ _ là bậc của hệ thống.

Nếu thay s=jω vào và tính ta sẽ có:

$$G_h(j\omega) = A(\omega).e^{j\varnothing(\omega)} = \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega) e^{j\sum_{i=1}^{n}\varnothing_i(\omega)}$$

Trong đó:

Biên độ: $$A(\omega) = \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega)$$

Góc pha: $$\varnothing(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \varnothing_i(\omega)$$

Hay viết dưới dạng phần thực, phần ảo:

$$G(j\omega) = Re(\omega) + j\,Im(\omega)$$

Thay các giá trị ω từ 0 đến ∞ vào A(ω) và ∅(ω) (hoặc Re(ω) và Im(ω)), tính giá trị rồi thể hiện lên đồ thị ta có thể vẽ được biểu đồ Nyquist của hệ thống.

Biên độ lôgarit của hệ thống hở:

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^{n} 20\lg A_i(\omega) = \sum_{i=1}^{n} L_i(\omega)$$

Như vậy biểu đồ Bode của hệ thống hở bằng tổng các biểu đồ Bode của các khâu động học thành phần. Điều này giúp ta dễ dàng xây dựng được biểu đồ Bode của hệ thống hở bằng phương pháp cộng đồ thị.

Để vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ của hệ thống bằng tiệm cận ta tiến hành các bước như sau:

- Xác định các tần số gãy $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$; $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$,... và sắp xếp theo thứ tự tần số tăng dần, giả sử ta có $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < ...$ ( hay $T_1 > T_2 > T_3 > ...$ )
- Tại điểm có ω =1 trên trục hoành (ví dụ gọi là điểm H) ta vẽ một đoạn thẳng HA vuông góc với trục hoành có độ dài HA=20lgK.

-Nếu K>1 thì 20lgK>0 nên HA nằm phía trên trục hoành

-Nếu K<1 thì 20lgK<0 nên HA nằm phía dưới trục hoành.

- Qua điểm A ta vẽ một đường thẳng có độ dốc -20 dB/dec x N và kéo dài tới tần số gãy $\omega_1$ . Giá trị N> 0 tương ứng với số khâu tích phân lý tưởng, giá trị N<0 tương ứng với số khâu vi phân lý tưởng. nếu N=0 (không có các khâu tích phân, vi phân lý tưởng) thì đoạn khởi đầu ứng với $\omega \le \omega_1$ sẽ là đường nằm ngang với biên độ $L(\omega)= 20\lg K = const$.
- Sau tần số $\omega_1$ thì tuỳ theo vị trí của $T_1$ trong hàm truyền, đường thẳng này sẽ thay đổi độ dốc như sau:

-Nếu $T_1$ thuộc khâu vi phân bậc1 (ở tử số) thì độ dốc cộng thêm +20 dB/dec.

-Nếu $T_1$ thuộc khâu $PT_1$ (ở mẫu số) thì độ dốc cộng thêm -20 dB/dec.

-Nếu $T_1$ thuộc khâu $PT_2$ dao động (ở mẫu số) thì độ dốc cộng thêm -40 dB/dec.

-Nếu $T_1$ thuộc $m$ khâu $PT_1$ thì độ dốc cộng thêm $-20m$ dB/dec.

- Cứ sau mỗi tần số gãy thì độ dốc lại thay đổi theo như quy luật trên.

**Ví dụ :** Vẽ biểu đồ Bode của hệ thống hở có hàm truyền:

$$G(s)=\frac{K(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)^2(T_4^2s^2+2\xi T_4 s+1)}$$

trong đó : K>1; $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$ .

**Giải.** Trước tiên ta xác định các tần số gãy

$$\omega_1=\frac{1}{T_1};\quad \omega_2=\frac{1}{T_2};\quad \omega_3=\frac{1}{T_3}\quad;\quad \omega_4=\frac{1}{T_4}$$

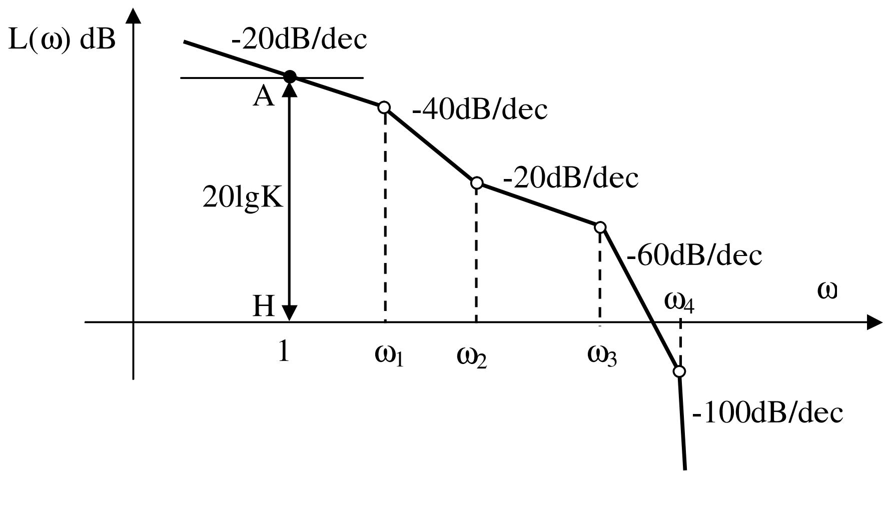
và sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$

Sau đó áp dụng quy tắc vẽ đã nêu ta được biểu đồ Bode như hình 3.30.

Để vẽ biểu đồ Bode pha, ta tính góc pha tổng:

$$\varnothing(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\varnothing_i(\omega)=-90^\circ-\operatorname{arctg}(\omega T_1)+\operatorname{arctg}(\omega T_2)-2\operatorname{arctg}(\omega T_3)-\operatorname{arctg}\frac{2\xi\omega T_4}{1-\omega^2T_4^2}$$

Với các giá trị ω khác nhau ta tính giá trị góc pha tương ứng và vẽ được biểu đồ Bode pha của hệ thống.




***Hình 3.30***

**Chương 4**

# TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG

## 4.1 Khái niệm

Ổn định là chỉ tiêu cơ bản của hệ thống điều khiển tự động. Một hệ thống muốn sử dụng được thì trước hết phải đạt yêu cầu về ổn định. Tính ổn định đặc trưng cho khả năng duy trì được trạng thái cân bằng của hệ khi chịu các tác động từ bên ngoài. Do có hai nguồn tác động từ bên ngoài mà ta thường quan tâm là tín hiệu vào và tín hiệu nhiễu nên tương ứng cũng có hai định nghĩa về ổn định.

- ***Ổn định BIBO:*** Hệ thống được gọi là ổn định BIBO (Bounded Input - Bounded Output) nếu với tín hiệu vào hữu hạn thì tín hiệu ra cũng hữu hạn.
- ***Ổn định tiệm cận (Lyapunov):*** Hệ thống được gọi là ổn định tại điểm cân bằng $x_0$ nếu như khi có một tác động tức thời đánh bật hệ ra khỏi $x_0$ thì sau đó hệ có khả năng tự quay về điểm cân bằng $x_0$ ban đầu.

Đối với hệ tuyến tính thì hai định nghĩa trên là tương đương. Hệ tuyến tính chỉ tồn tại một điểm trạng thái cân bằng là $x_0=0$.

Xét hệ thống tuyến tính có tín hiệu vào r(t), tín hiệu ra y(t), được mô tả bằng phương trình vi phân :

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0y(t)=b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_0r(t)$$

Đáp ứng của hệ thống xác định bằng nghiệm y(t) bao gồm hai thành phần:

$$y(t) = y_0(t) + y_{qđ}(t)$$

- § $y_0(t)$ là nghiệm riêng của phương trình khi có vế phải, đặc trưng cho quá trình xác lập.
- § $y_{qđ}(t)$ là nghiệm tổng quát của phương trình khi vế phải bằng 0, đặc trưng cho quá trình quá độ.

Nghiệm riêng $y_0(t)$ phụ thuộc tác động đầu vào. Nếu tác động đầu vào là hữu hạn thì $y_0(t)$ cũng hữu hạn nên nó luôn là một thành phần ổn định. Để xét tính ổn định của hệ thống ta chỉ cần xét đáp ứng quá độ.

Đáp ứng quá độ có dạng tổng quát :

$$y_{qđ}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i e^{s_i t}$$

trong đó:

$C_i$ là hằng số phụ thuộc vào thông số của hệ và điều kiện đầu (trạng thái đầu).

$s_i$ (i=1,2,...,n) là nghiệm của phương trình đặc tính:

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

$s_i$ còn gọi là cực của hệ thống.

$s_i$ có thể là số thực ($s_i = \alpha_i$) hay số phức ($s_i = \alpha_i \pm j\omega_i$).

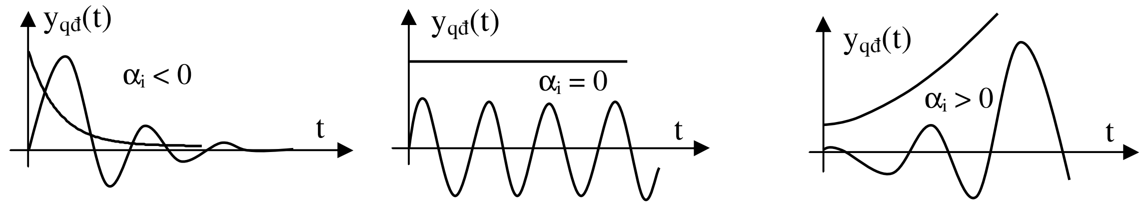
Từ phân tích nêu trên, ta có cách định nghĩa khác về hệ ổn định:

Một hệ thống tuyến tính được gọi là ổn định nếu quá trình quá độ tắt dần theo thời gian. Hệ thống không ổn định nếu quá trình quá độ tăng dần. Hệ thống ở giới hạn ổn định, nếu quá trình quá độ không đổi, hoặc dao động với biên độ không đổi.

Như vậy, hệ ổn định nếu : $\lim\limits_{t\to\infty} y_{qđ}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} C_i e^{s_i t} = 0$

Xét các trường hợp cụ thể ta thấy :

$$\lim_{t\to\infty} C_i e^{s_i t} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \alpha_i < 0 \ \to \text{hệ ổn định} \\ C_i & \text{nếu } \alpha_i = 0,\ \omega_i = 0 \to \text{hệ ở giới hạn ổn định} \\ A_i \sin(\omega_i t + \varnothing_i) & \text{nếu } \alpha_i = 0,\ \omega_i \neq 0 \to \text{hệ ở giới hạn ổn định} \\ \infty & \text{nếu } \alpha_i > 0 \ \to \text{hệ không ổn định} \end{cases}$$

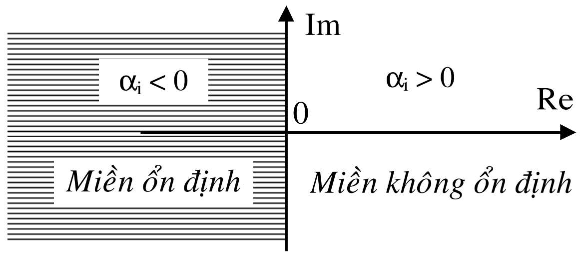



*a) Hệ ổn định* *b) hệ ở giới hạn ổn định* *c) hệ không ổn định*

***Hình 4.1*** *Các dạng quá trình quá độ*

**Kết luận :**

1. Hệ thống ổn định, nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính đều có phần thực âm. Nếu biểu diễn trên mặt phẳng phức thì các nghiệm này nằm ***bên trái*** trục ảo (thường gọi tắt là nghiệm trái).
2. Hệ thống không ổn định, nếu có ít nhất một nghiệm có phần thực dương. Nghiệm này nằm ***bên phải*** trục ảo (thường gọi tắt là nghiệm phải).
3. Hệ thống ở giới hạn ổn định, nếu có ít nhất một nghiệm có phần thực bằng 0 và các nghiệm còn lại có phần thực âm, tức là có ít nhất một nghiệm nằm trên trục ảo và các nghiệm còn lại nằm bên trái trục ảo.




***Hình 4.2*** *Phân bố nghiệm trên mặt phẳng phức s*

Từ các phân tích trên, ta thấy phương pháp trực tiếp để đánh giá tính ổn định của hệ thống là giải phương trình đặc tính rồi xét dấu phần thực của nghiệm hoặc xét sự phân bố nghiệm trên mặt phẳng phức.

Để tránh phải giải phương trình đặc tính, ta có các phương pháp gián tiếp, tiện lợi hơn, đó là :

- Tiêu chuẩn ổn định đại số : bao gồm tiêu chuẩn Routh, Hurwitz.
- Tiêu chuẩn ổn định tần số : bao gồm tiêu chuẩn Mikhailov, Nyquist.

- Phương pháp quỹ đạo nghiệm và phương pháp chia miền ổn định. Hai phương pháp này thường dùng để xét tính ổn định của hệ thống khi có một thông số biến đổi trong một phạm vi nào đó.

## 4.2 Tiêu chuẩn ổn định đại số

Các tiêu chuẩn ổn định đại số tìm điều kiện ràng buộc giữa các hệ số của phương trình đặc tính để hệ thống ổn định. Các tiêu chuẩn này áp dụng cho hệ hở hay hệ kín đều được.

### 4.2.1 Điều kiện cần

Điều kiện cần để hệ thống ổn định là tất cả các hệ số của phương trình đặc tính đều dương. (Nếu các hệ số đều âm, chúng có thể đổi thành dương bằng cách nhân hai vế cho -1)

**Ví dụ 4.1.** Hệ thống có phương trình đặc tính:

- $s^3 + 5s^2 - 3s + 1 = 0$ không ổn định vì hệ số $a_1<0$
- $s^4 + 5s^2 + 3s + 1 = 0$ không ổn định vì hệ số $a_3=0$
- $s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 3s + 1 = 0$ mới thỏa điều kiện cần, chưa kết luận được.

Điều kiện cần có thể kiểm chứng như sau:

Một đa thức của s có các hệ số thực luôn có thể phân tích thành các thừa số bậc nhất như (s+a) và bậc hai như ($s^2$+bs+c) trong đó a, b, c là các số thực. Thừa số bậc nhất (s+a) cho nghiệm thực âm khi và chỉ khi a dương. Thừa số bậc hai ($s^2$+bs+c) cho các nghiệm có phần thực âm khi và chỉ khi b và c đều dương. Để đa thức có tất cả các nghiệm có phần thực âm (hệ ổn định) thì các hệ số a, b, c,... trong tất cả các thừa số đều phải dương. Tích của các thừa số bậc nhất và bậc hai chỉ bao gồm các hệ số dương luôn luôn tạo ra một đa thức với các hệ số dương, nhưng điều ngược lại thì có thể không đúng (ví dụ $s^3 + s^2 + 4s + 30 = (s+3)(s^2 - 2s + 10)$), do đó phát biểu đã nêu chỉ là điều kiện cần.

### 4.2.2 Tiêu chuẩn Routh

Cho hệ thống bậc n có phương trình đặc tính

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Để xét ổn định theo tiêu chuẩn Routh, trước tiên ta cần lập bảng Routh :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | ... |
| $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | ... |
| $c_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$ | $c_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$ | $c_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$ | ... |
| $d_1 = \frac{c_1 a_{n-3} - c_2 a_{n-1}}{c_1}$ | $d_2 = \frac{c_1 a_{n-5} - c_3 a_{n-1}}{c_1}$ | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... |

- Bảng Routh gồm (n+1) hàng.
- Hai hàng đầu chứa các hệ số của PTĐT sắp xếp theo hình $|\!\nearrow\!\downarrow$, từ $a_n$ đến $a_0$ .

- Từ hàng thứ 3 trở đi, muốn tính phần tử ở cột thứ i, ta lấy bốn phần tử của hai hàng nằm liền trước, bao gồm hai phần tử ở cột 1 và hai phần tử ở cột (i+1). Sắp xếp 4 phần tử theo thứ tự từ trên xuống dưới và từ trái qua phải để được một định thức. Tính số đối của định thức đó rồi đem chia cho giá trị ở cột 1 của hàng liền trước hàng đang tính.

**Phát biểu :**

- Điều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định là các phần tử ở cột thứ nhất của bảng Routh đều dương.
- Số lần đổi dấu của các phần tử ở cột thứ nhất bằng số nghiệm của phương trình đặc tính có phần thực dương (nằm bên phải trục ảo).

***Nhận xét:***

- Nếu phương trình đặc tính có hệ số nào đó âm hoặc bằng 0, tức là không thoả điều kiện cần, thì có thể kết luận ngay là hệ thống không ổn định mà không cần dùng tiêu chuẩn Routh.
- Bảng Routh cũng có thể kết thúc ngay khi ở cột 1 có hệ số âm hoặc bằng 0 và kết luận hệ thống không ổn định.
- Có thể nhân hay chia tất cả các hệ số trong cùng một hàng của bảng Routh với một hằng số dương để đơn giản hoá việc tính toán mà không làm thay đổi kết quả xét ổn định.

**Ví dụ 4.2.** Xét hệ thống có phương trình đặc tính

$$s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 4s + 1 = 0$$

Lập bảng Routh:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 |
| 2 | 4 | 0 |
| $c_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 5\\2 & 4\end{vmatrix}}{2} = \dfrac{2(5)-1(4)}{2} = 3$ | $c_2 = \dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{vmatrix}}{2} = \dfrac{2(1)-1(0)}{2} = 1$ | 0 |
| $d_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix}2 & 4\\3 & 1\end{vmatrix}}{3} = \dfrac{3(4)-2(1)}{3} = \dfrac{10}{3}$ | $d_2 = \dfrac{-\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 0\end{vmatrix}}{3} = 0$ | 0 |
| $e_1 = \dfrac{d_1(c_2) - c_1(0)}{d_1} = c_2 = 1$ | $e_2 = 0$ | 0 |

Vì các phần tử ở cột 1 đều dương nên hệ thống ổn định. Tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính đều có phần thực âm (nằm bên trái trục ảo).

**Ví dụ 4.3.** Xét hệ thống có phương trình đặc tính

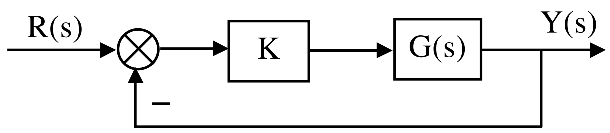
$$s^4 + 4s^3 + s^2 + 8s + 2 = 0$$

***Giải.*** Lập bảng Routh: (các ô trống được xem là bằng 0)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 4 | 8 | 0 |
| -1 | 2 | |
| 16 | 0 | |
| 2 | | |

Các hệ số ở cột 1 không cùng dấu nên hệ không ổn định. Hơn nữa chúng đổi dấu hai lần (từ 4 qua -1 và từ -1 qua 16) nên phương trình đặc tính có 2 nghiệm có phần thực dương.

**Ví dụ 4.4.** Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình (4.3). Hãy xác định khoảng giá trị của tham số K để hệ thống ổn định.




$$G(s) = \frac{1}{s(2s+1)(s^2+s+1)}$$

***Hình 4.3***

***Giải.*** Hàm truyền của hệ kín: $G_k(s) = \dfrac{K.G(s)}{1+K.G(s)}$

Phương trình đặc tính của hệ kín: $1 + K.G(s) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{K}{s(2s+1)(s^2+s+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s + K = 0$$

Bảng Routh:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | K |
| 3 | 1 | 0 |
| 7/3 | K | |
| 1 – (9/7)K | 0 | |
| K | | |

Theo tiêu chuẩn Routh, điều kiện để hệ thống ổn định là:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{9}{7}K > 0 \\ K > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < K < \frac{7}{9}$$

**Các trường hợp đặc biệt**

Ngay khi ở cột 1 bảng Routh có hệ số bằng 0 ta có thể kết luận là hệ thống không ổn định. Tuy nhiên để xác định rõ số nghiệm có phần thực dương, âm và/hoặc số nghiệm ảo thì cần xem xét tiếp như sau:

§ ***Trường hợp 1 :*** Nếu hệ số ở cột 1 của hàng nào đó bằng 0, nhưng các hệ số còn lại của hàng đó khác 0 thì ta thay hệ số bằng 0 đó bằng số ε dương nhỏ tuỳ ý và tiếp tục tính.

**Ví dụ 4.5.** Xét hệ thống có phương trình đặc tính :

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 6 = 0$$

Lập bảng Routh :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 6 | 6 |
| $0 \Rightarrow \varepsilon > 0$ | 2 | 0 |
| $d_1$ | 6 | 0 |
| $e_1$ | 0 | |
| 6 | | |

$$d_1 = \frac{6\varepsilon - 4}{\varepsilon} \quad ; \quad e_1 = \frac{2d_1 - 6\varepsilon}{d_1} = \frac{12\varepsilon - 8 - 6\varepsilon^2}{6\varepsilon - 4}$$

Vì ε >0 nhỏ tuỳ ý nên $d_1 < 0$ ; và $e_1 = 2$ khi $\varepsilon \to 0$. Do đó cột 1 có hai lần đổi dấu. Hệ không ổn định, có hai nghiệm có phần thực dương.

§ ***Trường hợp 2 :*** Tất cả các hệ số của hàng nào đó bằng 0. Nếu các hệ số của PTĐT đều dương, tức là đã thoả điều kiện cần, thì điều này cho biết PTĐT có một hoặc một số cặp nghiệm ảo đối nhau.

- Lập đa thức phụ P(s) từ các hệ số của hàng trước hàng có các hệ số bằng 0, sau đó thay các hệ số 0 bằng các hệ số của đạo hàm dP(s)/ds và tiếp tục tính. Nghiệm của đa thức phụ P(s) cũng chính là nghiệm của phương trình đặc tính.

**Ví dụ 4.6.** Xét hệ thống có phương trình đặc tính :

$$s^5 + 3s^4 + 5s^3 + 15s^2 + 4s + 12 = 0$$

Lập bảng Routh :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 5 | 4 |
| $s^4$ | 3 | 15 | 12 |
| $s^3$ | $0 \Rightarrow 12$ | $0 \Rightarrow 30$ | 0 |
| $s^2$ | 15/2 | 12 | |
| $s^1$ | 54/5 | 0 | |
| $s^0$ | 12 | | |

Lập đa thức phụ P(s) từ các hệ số của hàng $s^4$ :

$$P(s) = 3s^4 + 15s^2 + 12$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP(s)}{ds} = 12s^3 + 30s^2 \quad \Rightarrow \text{ Thay 12 và 30 vào hàng } s^3$$

Nghiệm của đa thức phụ :

$$P(s) = 3s^4 + 15s^2 + 12 = 3(s^2 + 1)(s^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s = \pm j \quad \text{và} \quad s = \pm 2j$$

Các nghiệm này cũng chính là nghiệm của phương trình đặc tính.

***Kết luận :***

- Các hệ số cột 1 bảng Routh không đổi dấu nên phương trình đặc tính không có nghiệm với phần thực dương.
- Phương trình đặc tính có bốn nghiệm ảo, một nghiệm thực âm.
- Hệ thống ở giới hạn ổn định.

Kết luận trên có thể kiểm chứng bằng cách biểu diễn phương trình đặc tính đã cho dưới dạng tích các thừa số :

$$s^5 + 3s^4 + 5s^3 + 15s^2 + 4s + 12 = (s+3)(s^2+1)(s^2+4) = 0$$

### 4.2.3 Tiêu chuẩn Hurwitz

Cho hệ thống bậc n có phương trình đặc tính :

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

Để xét tính ổn định của hệ thống theo tiêu chuẩn Hurwitz, cần lập n định thức Hurwitz $H_i$ (i=1,2,...,n) theo qui tắc:

§ Đường chéo chính của định thức $H_i$ chứa các hệ số từ $a_1$ đến $a_i$ .

§ Các hệ số ở cùng một cột, phía trên đường chéo chính có chỉ số tăng dần, phía dưới đường chéo chính có chỉ số giảm dần.

§ Các vị trí còn trống được điền số 0.

$$\begin{array}{c|cccccc|}
H_1 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\
H_2 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\
H_3 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\
H_4 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
H_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n
\end{array}$$

**Phát biểu :**

- Điều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định là các hệ số của phương trình đặc tính và các định thức Hurwitz đều dương.
- Số lần đổi dấu trong dãy $H_1, H_2, \dfrac{H_2}{H_1}, \dfrac{H_3}{H_2}, \cdots, \dfrac{H_n}{H_{n-1}}$ bằng số nghiệm có phần thực dương (nằm bên phải trục ảo).

**Ví dụ 4.7.** Xét hệ thống bậc ba có phương trình đặc tính :

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Để hệ ổn định ta phải có $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ và các định thức Hurwitz:

$$H_1 = a_1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & 0 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 H_2 > 0$$

Tóm lại, hệ bậc ba ổn định nếu:

$$\begin{cases} a_0, a_1, a_2, a_3 > 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \end{cases}$$

**Ví dụ 4.8.** Xét hệ thống bậc bốn có phương trình đặc tính :

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Để hệ ổn định ta phải có $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ và:

$$H_1 = a_1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 H_3 > 0$$

Tóm lại, hệ bậc bốn ổn định nếu:

$$\begin{cases} a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 > 0 \\ a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0 \end{cases}$$

***Nhận xét:***

- Với hệ thống bậc1 và bậc 2 thì điều kiện cần ($a_0, a_1, a_2 > 0$ ) cũng là điều kiện đủ.
- Tiêu chuẩn Hurwitz thường áp dụng cho hệ bậc thấp ($n \leq 4$). Với hệ bậc cao, việc tính định thức sẽ tốn nhiều thời gian.
- Xét hai phương trình đặc tính có hệ số đối ngẫu :

$$A_1(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

$$A_2(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (2)$$

Ta thấy $A_2(s) = s^n A_1(s^{-1})$. Vì vậy nếu $s_i$ (i=1,2,...,n) là nghiệm của phương trình (1) thì $s_i^{-1}$ sẽ là nghiệm của phương trình (2). Nhưng vì $s_i$ và $s_i^{-1}$ luôn có phần thực cùng dấu nhau nên nếu hệ có phương trình đặc tính (1) ổn định thì hệ có phương trình đặc tính (2) cũng ổn định. Tương tự ta có điều ngược lại. Do đó :

*Các định thức Hurwitz và bảng Routh đã trình bày trong chương này có thể áp dụng để xét ổn định cho các hệ thống có phương trình đặc tính dạng (1) hoặc (2) đều được.*

## 4.3 Tiêu chuẩn ổn định tần số

Tiêu chuẩn ổn định tần số dựa trên các biểu đồ đặc tính tần số để xét tính ổn định của hệ thống.

### 4.3.1 Nguyên lý góc quay

Xét phương trình đặc tính bậc n có các nghiệm $s_i$ (i=1,2,...,n) :

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0$$

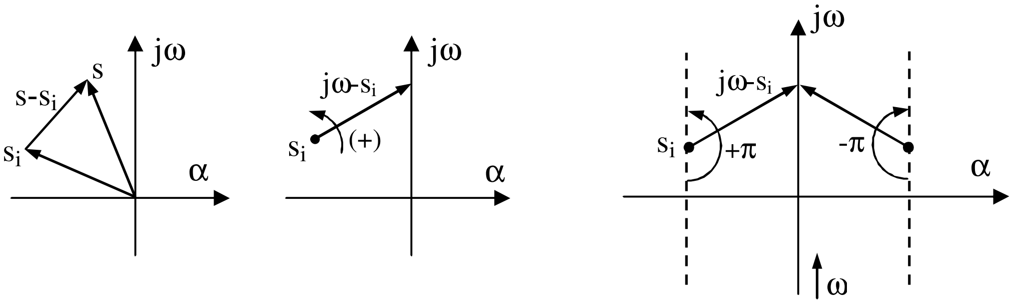
Đa thức đặc tính A(s) ở vế trái có thể viết dưới dạng:

$$A(s) = a_n (s - s_1)(s - s_2)...(s - s_n)$$

Thay s=jω ta được đa thức đặc tính tần số:

$$A(j\omega) = a_n (j\omega - s_1)(j\omega - s_2)...(j\omega - s_n)$$

Mỗi số phức có thể biểu diễn trên mặt phẳng phức bằng một điểm hoặc một véctơ. Ví dụ nghiệm $s_i = \alpha_i + j\omega_i$ có thể biểu diễn bằng điểm $s_i$ có toạ độ $(\alpha_i, j\omega_i)$ hoặc vectơ $s_i$ có gốc trùng với gốc toạ độ, thành phần $(j\omega - s_i)$ biểu diễn bằng vectơ có gốc ở điểm $s_i$ và ngọn nằm trên trục ảo (xem hình 4.4). Khi ω thay đổi, độ dài và góc của véctơ $(j\omega - s_i)$ cũng thay đổi theo. Nếu quy ước chiều quay dương là chiều ngược kim đồng hồ thì khi ω thay đổi từ -∞ đến +∞ , mỗi véctơ thành phần $(j\omega - s_i)$ sẽ quay một góc là +π nếu nghiệm tương ứng nằm bên trái trục ảo, là - π nếu nghiệm tương ứng nằm bên phải trục ảo, là 0 nếu nghiệm tương ứng nằm trên trục ảo.




***Hình 4.4.***

Dùng ký hiệu Δarg để chỉ góc quay, ta có :

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) = \begin{cases} +\pi & \text{nếu } s_i \text{ nằm bên trái trục ảo.} \\ -\pi & \text{nếu } s_i \text{ nằm bên phải trục ảo.} \\ 0 & \text{nếu } s_i \text{ nằm trên trục ảo.} \end{cases}$$

Giả sử phương trình đặc tính có m nghiệm nằm bên phải trục ảo và (n-m) nghiệm nằm bên trái trục ảo. Khi đó :

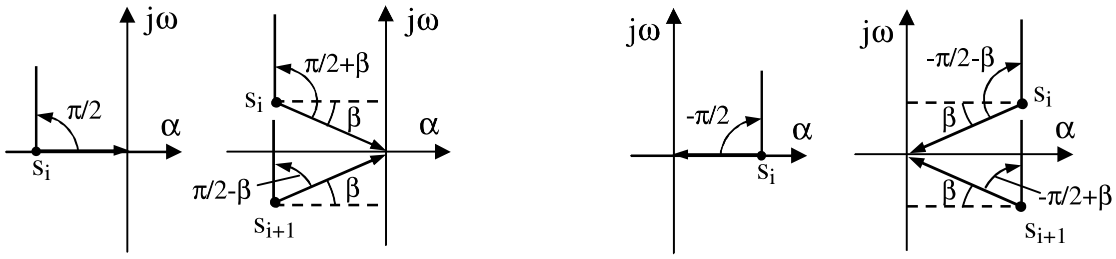
$$\sum_{i=1}^{m} \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) = -m\pi$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) = (n - m)\pi$$

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} A(j\omega) = \sum_{i=1}^{n-m} \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) + \sum_{i=1}^{m} \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) = (n - 2m)\pi$$

Trong thực tế ta chỉ cần xét ω thay đổi từ 0 đến +∞. Theo hình (4.5) ta thấy:

- Nếu $s_i$ là nghiệm thực nằm bên trái trục ảo thì $(j\omega - s_i)$ quay một góc $+\pi/2$
- Nếu $s_i$ và $s_{i+1}$ là cặp nghiệm phức liên hợp nằm bên trái trục ảo thì tổng hai góc quay của $(j\omega - s_i)$ và $(j\omega - s_{i+1})$ là $+2\pi/2$ vì :
  - ứng với $s_i$ ta có $(j\omega - s_i)$ quay một góc $\pi/2+\beta$
  - ứng với $s_{i+1}$ ta có $(j\omega - s_{i+1})$ quay một góc $\pi/2-\beta$
- Nếu $s_i$ là nghiệm thực nằm bên phải trục ảo thì $(j\omega - s_i)$ quay một góc $-\pi/2$
- Nếu $s_i$ và $s_{i+1}$ là cặp nghiệm phức liên hợp nằm bên phải trục ảo thì tổng hai góc quay là $-2\pi/2$.




***Hình 4.5.*** *Góc quay của các vectơ khi w thay đổi từ 0 đến + ¥*

Do đó nếu phương trình đặc tính có m nghiệm nằm bên phải trục ảo và (n-m) nghiệm nằm bên trái trục ảo thì khi ω thay đổi từ 0 đến +∞ :

$$\sum_{i=1}^{m} \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) = -m\frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) = (n-m)\frac{\pi}{2}$$

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} A(j\omega) = \sum_{i=1}^{n-m} \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) + \sum_{i=1}^{m} \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) = (n-2m)\frac{\pi}{2}$$

### 4.3.2 Tiêu chuẩn Mikhailov

**Phát biểu:**

Điều kiện cần và đủ để hệ tuyến tính bậc *n* ổn định là đường đặc tính $A(j\omega)$ xuất phát từ trục thực dương và quay *n* góc phần tư (nói cách khác là bao gốc toạ độ một góc bằng $n(\pi/2)$) theo chiều ngược kim đồng hồ khi ω thay đổi từ 0 đến +∞.

***Chứng minh:***

Xét hệ thống bậc n có phương trình đặc tính :

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0$$

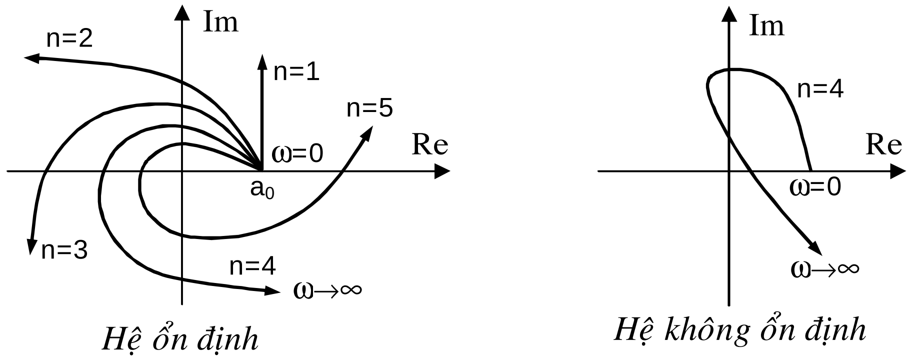
Đa thức đặc tính tần số:

$$A(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + ... + a_1(j\omega) + a_0$$

Điều kiện cần để hệ ổn định là các hệ số của phương trình đặc tính phải dương. Do đó khi ω=0 thì $A(j\omega) = a_0 > 0$, tức là đường đặc tính $A(j\omega)$ phải xuất phát từ điểm $(a_0, j0)$ nằm ở nửa trục thực dương.

Hệ thống bậc n ổn định nếu tất cả n nghiệm đều nằm bên trái trục ảo. Theo nguyên lý góc quay ta có điều phải chứng minh:

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\ A(j\omega) = \frac{n\pi}{2}$$




***Hình 4.6.*** *Minh hoạ tiêu chuẩn Mikhailov.*

***Nhận xét:***

- Tiêu chuẩn Mikhailov có thể dùng để xét ổn định cho cả hệ hở và hệ kín.

- Để xây dựng đường đặc tính $A(j\omega)$ ta thay $s= j\omega$ vào phương trình đặc tính rồi tách riêng phần thực và phần ảo:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + ... + a_1(j\omega) + a_0 \\ &= P(\omega) + jQ(\omega) \end{aligned}$$

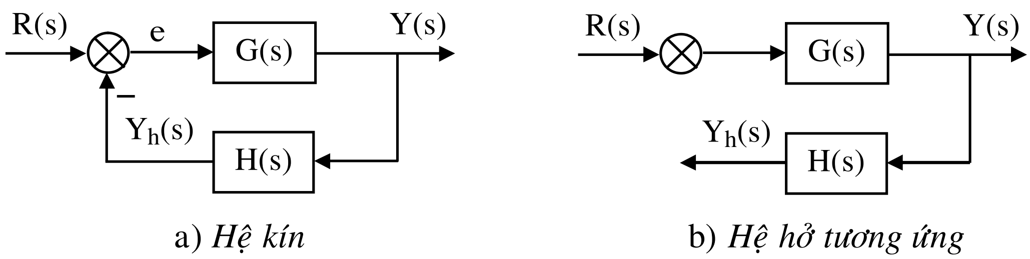
Sau đó cho $\omega$ biến thiên từ $0$ đến $+\infty$, tính các giá trị $P(\omega)$ và $Q(\omega)$ tương ứng rồi thể hiện trên đồ thị.

Việc xây dựng đường đặc tính $A(j\omega)$ của các đa thức $A(s)$ có bậc cao là phức tạp hơn nhiều so với các tính toán đại số ở tiêu chuẩn Routh- Hurwitz. Chính vì hạn chế này mà tiêu chuẩn Mikhailov ít được dùng trong thực tế.

### 4.3.3 Tiêu chuẩn Nyquist

Tiêu chuẩn Nyquist xét tính ổn định của hệ thống kín thông qua biểu đồ Nyquist của hệ thống hở. Tiêu chuẩn này rất hữu dụng vì trong nhiều trường hợp thực tế việc tìm hàm truyền của hệ kín bằng giải tích rất phức tạp, trong khi đặc tính tần số hệ hở thì có thể xác định được từ thực nghiệm. Một ưu điểm khác là tiêu chuẩn Nyquist áp dụng thuận lợi cho cả hệ thống có khâu trễ.

Xét hệ kín hồi tiếp âm như trên hình 4.7a. Nếu ngắt mạch phản hồi ở ngay trước bộ so ta có hệ hở (hệ vòng hở, hệ ở trạng thái hở) như hình 4.7b.



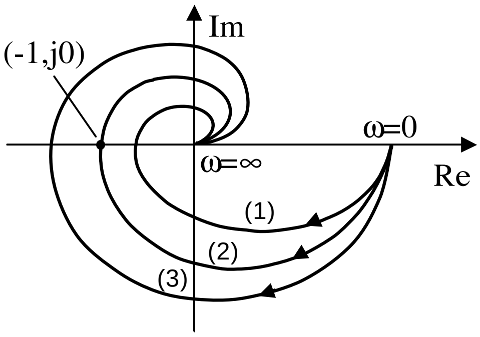

***Hình 4.7.*** *Hệ kín và hệ hở tương ứng*

**Phát biểu:**

a) Hệ kín ổn định khi hệ hở ổn định và đường Nyquist của hệ hở không bao điểm (-1,j0).

b) Hệ kín ổn định khi hệ hở không ổn định và đường Nyquist của hệ hở bao điểm (-1,j0) một góc bằng $m\pi$ theo chiều ngược kim đồng hồ khi $\omega$ thay đổi từ 0 đến $+\infty$ ; với m là số nghiệm có phần thực dương của phương trình đặc tính hệ hở.

Điểm (-1,j0) gọi là điểm tới hạn, nếu đường Nyquist hệ hở đi qua điểm này thì hệ kín ở giới hạn ổn định.




***Hình 4.8.*** *Minh hoạ tiêu chuẩn Nyquist cho ba trường hợp hệ hở ổn định và kết quả:*

*(1) Hệ kín ổn định*

*(2) Hệ kín ở giới hạn ổn định*

*(3) Hệ kín không ổn định*

***Chứng minh:***

***a) Khi hệ hở ổn định***

Hàm truyền của hệ hở có thể biểu diễn dưới dạng :

$$G_h(s) = G(s)H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Trong đó A(s) và B(s) là các đa thức theo s. Để hệ thống tồn tại và khả thi trong thực tế thì bậc của B(s) $\le$ bậc của A(s).

Hàm truyền của hệ kín :

$$G_k(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+G_h(s)}$$

Phương trình đặc tính của hệ hở : A(s) = 0

Phương trình đặc tính của hệ kín :

$$1+G_h(s) = 1+\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s)+B(s)}{A(s)} = \frac{A_k(s)}{A(s)} = 0$$

Nghiệm của phương trình đặc tính hệ kín sẽ là nghiệm của:

$$A_k(s) = A(s) + B(s) = 0$$

Do bậc của B(s) $\le$ bậc của A(s) nên nếu phương trình đặc tính hệ hở có bao nhiêu nghiệm thì phương trình đặc tính hệ kín cũng có bấy nhiêu nghiệm.

Gọi $s_i$ là nghiệm của phương trình đặc tính hệ hở và $s_i'$ là nghiệm của phương trình đặc tính hệ kín với i=1,2,...,n. Ta được:

$$1+G_h(s) = \frac{A_k(s)}{A(s)} = K\frac{(s-s_1')(s-s_2')...(s-s_n')}{(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)} = \frac{\text{Đa thức đặc tính hệ kín}}{\text{Đa thức đặc tính hệ hở}}$$

trong đó K là hằng số.

Thay $s = j\omega$ ta có dạng tần số:

$$1+G(j\omega)=\frac{A_k(j\omega)}{A(j\omega)}=K\frac{(j\omega-s_1')(j\omega-s_2')...(j\omega-s_n')}{(j\omega-s_1)(j\omega-s_2)...(j\omega-s_n)}$$

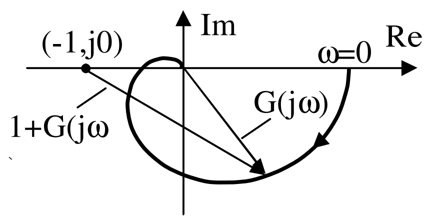
Từ biểu thức trên ta thấy vectơ 1+G(jω) đặc trưng cho mối quan hệ giữa hệ hở và hệ kín. Hàm G(jω) là hàm truyền tần số của hệ hở. Đường cong G(jω) chính là đường Nyquist của hệ hở. Vectơ 1+G(jω) nối từ điểm (-1,j0) tới đường cong G(jω). Góc bao điểm (-1,j0) của đường G(jω) cũng chính là góc quay của vectơ 1+G(jω).

Khi hệ hở ổn định, phương trình đặc tính A(s)= 0 có n nghiệm đều ở bên trái trục ảo nên theo nguyên lý góc quay:

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\ A(j\omega)=\frac{n\pi}{2}$$

Hệ thống kín muốn ổn định thì phương trình $A_k(s)=0$ cũng phải có n nghiệm ở bên trái trục ảo nên :

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\ A_k(j\omega)=\frac{n\pi}{2}$$




***Hình 4.9***

Khi đó góc quay của vectơ 1+G(jω):

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\left[1+G(j\omega)\right]=\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\ A_k(j\omega)-\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\ A(j\omega)=\frac{n\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}=0$$

Điều này đồng nghĩa với đường Nyquist G(jω) của hệ hở phải không bao điểm (-1,j0) .

***b) Khi hệ hở không ổn định***

Hệ hở không ổn định nên phương trình đặc tính hệ hở A(s)=0 có ít nhất một nghiệm nằm bên phải trục ảo. Giả sử có m nghiệm nằm bên phải trục ảo và (n-m) nghiệm nằm bên trái trục ảo. Theo nguyên lý góc quay ta có:

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\ A(j\omega)=-m\frac{\pi}{2}+(n-m)\frac{\pi}{2}=(n-2m)\frac{\pi}{2}$$

Hệ kín muốn ổn định thì:

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\ A_k(j\omega)=\frac{n\pi}{2}$$

Khi đó góc quay của vectơ 1+G(jω):

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\left[1+G(j\omega)\right]=\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\ A_k(j\omega)-\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\ A(j\omega)=n\frac{\pi}{2}-(n-2m)\frac{\pi}{2}=m\pi$$

Điều này đồng nghĩa với đường Nyquist G(jω) phải bao điểm (-1,j0) một góc đúng bằng $m\pi$ khi ω thay đổi từ 0 đến $+\infty$.

***Chú ý:***

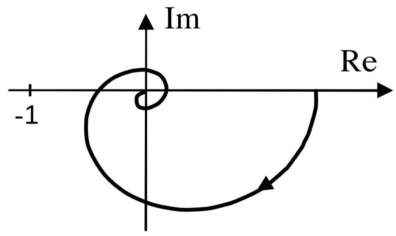
- Trước khi áp dụng tiêu chuẩn Nyquist phải xét xem hệ hở có ổn định hay không. Có thể giải phương trình đặc tính hệ hở hoặc áp dụng các tiêu chuẩn ổn định đại số để xét hệ hở.

- Đối với các hệ thống có khâu tích phân lý tưởng thì hệ hở có nghiệm cực bằng 0 (nằm trên trục ảo). Để áp dụng tiêu chuẩn Nyquist, ta vẽ thêm một cung tròn $-\gamma\frac{\pi}{2}$ có bán kính vô cùng lớn, với $\gamma$ là số khâu tích phân lý tưởng trong hàm truyền hệ hở.

**Ví dụ 4.9.** Cho hệ hở có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{10}{(s+3)(s+1,24)^5}$$

và biểu đồ Nyquist hệ hở như hình bên cạnh. Hãy dùng tiêu chuẩn Nyquist để xét tính ổn định của hệ kín tương ứng.




***Giải.***

Phương trình đặc tính hệ hở :

$$(s+3)(s+1,24)^5 = 0$$

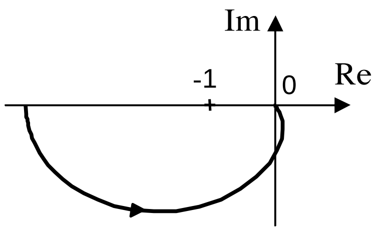
Phương trình có một nghiệm s =-3 và năm nghiệm s=-1,24 . Các nghiệm này đều âm nên hệ hở ổn định.

Hệ hở ổn định và đường Nyquist hệ hở không bao điểm (-1; j0) nên theo tiêu chuẩn Nyquist, hệ kín tương ứng cũng ổn định.

**Ví dụ 4.10.** Cho hệ hở có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{4}{(0,8s+1)(s-1)^3}$$

và biểu đồ Nyquist hệ hở như hình bên cạnh. Hãy dùng tiêu chuẩn Nyquist để xét tính ổn định của hệ kín tương ứng.

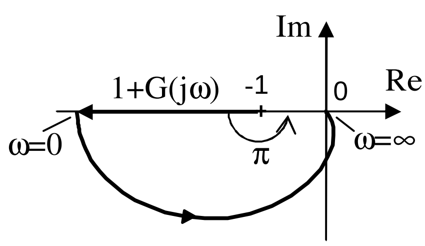



***Giải.***

Phương trình đặc tính hệ hở :

$$(0,8s+1)(s-1)^3 = 0$$

Phương trình này có : một nghiệm thực âm s =-1,25 và ba nghiệm thực dương s=1 nên hệ hở không ổn định.

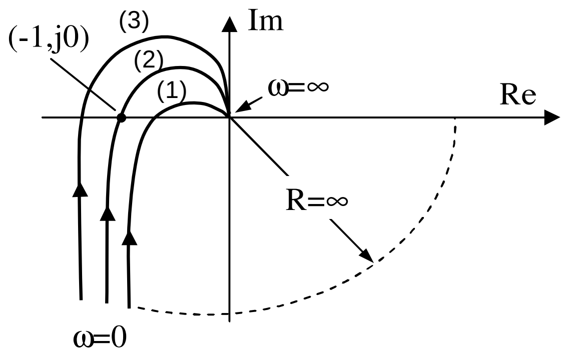



Hệ hở không ổn định và đường Nyquist hệ hở bao điểm (-1; j0) một góc là $\pi$ ($\neq 3\pi$) theo chiều ngược kim đồng hồ khi $\omega$ thay đổi từ 0 đến $\infty$ nên theo tiêu chuẩn Nyquist, hệ kín tương ứng không ổn định.

**Ví dụ 4.11.** Xét tính ổn định của hệ hồi tiếp âm có hàm truyền của hệ hở là:

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Với giá trị $T_1$, $T_2$ cố định, tùy theo giá trị của tham số K mà biểu đồ Nyquist hệ hở có thể có một trong ba dạng sau:




***Hình 4.10***

Trường hợp này hệ hở ở giới hạn ổn định (có 1 cực bằng 0, các cực còn lại là nghiệm thực âm). Tương ứng với khâu tích phân, ta vẽ thêm cung tròn 90 ° bán kính vô cùng lớn rồi áp dụng tiêu chuẩn Nyquist tương tự trường hợp hệ hở ổn định.

- Trường hợp (1): K nhỏ, $G(j\omega)$ không bao điểm (-1,j0) $\Rightarrow$ hệ kín ổn định.
- Trường hợp (2): $K=K_{gh}$, $G(j\omega)$ đi qua điểm (-1,j0) $\Rightarrow$ hệ kín ở giới hạn ổn định.
- Trường hợp (3): K lớn, $G(j\omega)$ bao điểm (-1,j0) $\Rightarrow$ hệ kín không ổn định.

### 4.3.4 Độ dự trữ ổn định

Trong thực tế hệ thống không những cần phải ổn định mà còn phải đạt mức độ ổn định cần thiết. Để đánh giá mức độ ổn định của hệ thống người ta đưa ra khái niệm độ dự trữ biên độ và độ dự trữ pha.

§ Tần số tại đó biên độ $A(\omega)=1$, tức $L(\omega)= 0$ dB gọi là tần số cắt biên $\omega_c$

§ Tần số tại đó góc pha $\varnothing(\omega)=-\pi=-180°$ gọi là tần số cắt pha $\omega_{-\pi}$

§ Độ dự trữ biên độ GM (Gain Margin) đặc trưng cho mức độ tiếp cận giới hạn ổn định về phương diện biên độ.

$$GM = \frac{1}{A(\omega_{-\pi})} \quad \text{(không đơn vị)} \quad \rightarrow \text{ dùng với biểu đồ Nyquist}$$

hay $$GM = -L(\omega_{-\pi}) \quad \text{(đơn vị là dB)} \quad \rightarrow \text{ dùng với biểu đồ Bode}$$

***Nhận xét:*** Khi $A(\omega_{-\pi})$ tăng thì GM giảm. Giá trị GM=1 (không đơn vị) hoặc 0 (đơn vị dB) đặc trưng cho giới hạn ổn định. Biên độ $A(\omega)$ chính là tỉ số giữa biên độ của tín hiệu ra và tín hiệu vào sin, do đó độ dự trữ biên độ cũng biểu thị mức cho phép tăng hệ số khuếch đại K của hệ hở mà vẫn giữ được hệ kín ổn định.

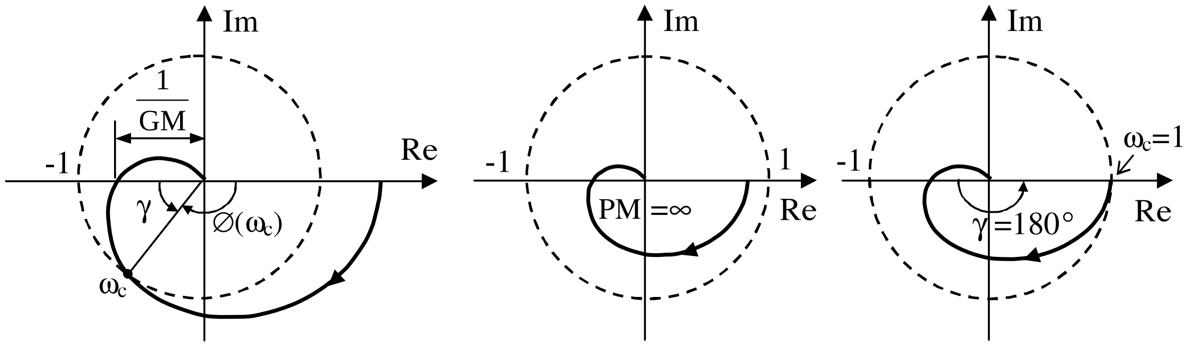
§ Độ dự trữ pha PM (Phase Margin) đặc trưng cho mức độ tiếp cận giới hạn ổn định về phương diện góc pha.

$$PM = 180° + \varnothing(\omega_c)$$

Độ dự trữ ổn định biên độ và pha có thể xác định từ biểu đồ Nyquist hay biểu đồ Bode.

***Dựa vào biểu đồ Nyquist:***

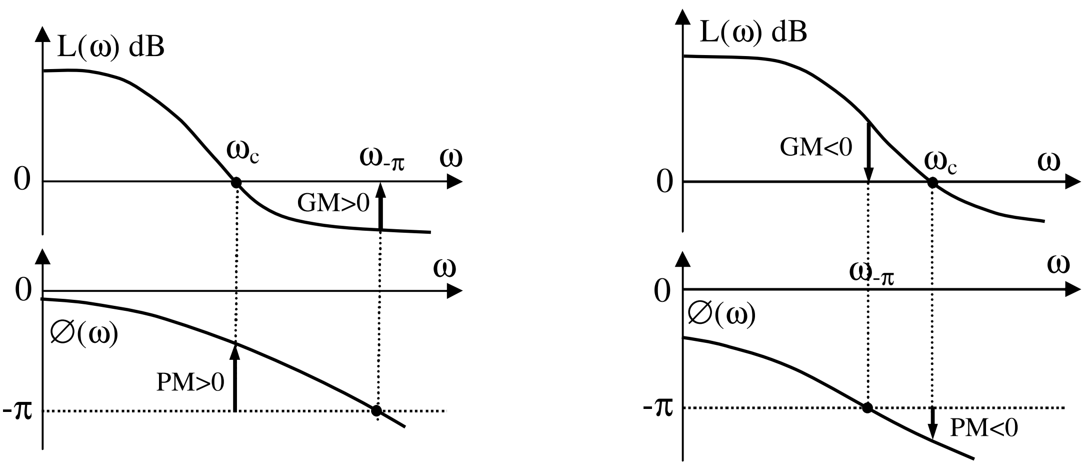
Từ giao điểm giữa đường Nyquist và trục thực âm ta xác định được biên độ $A(\omega_{-\pi}) = 1/GM$. Từ giao điểm giữa đường Nyquist và đường tròn đơn vị ta xác định được góc $\gamma$ = PM. Nếu đường Nyquist hoàn toàn nằm bên trong đường tròn đơn vị thì PM=∞. Nếu đường Nyquist không cắt trục thực âm thì GM=1/0= ∞.




***Hình 4.11*** *Xác định độ dự trữ biên và pha từ biểu đồ Nyquist*

***Dựa vào biểu đồ Bode:***

Độ dự trữ biên GM tính từ đường L( ω) đến trục ω. Độ dự trữ pha PM tính từ đường thẳng -π (hay -180°) đến đường cong ∅(ω).




***Hình 4.12*** *Xác định độ dự trữ biên và pha trên biểu đồ Bode*

Sau khi xác định được độ dự trữ biên độ GM và độ dự trữ pha PM của hệ hở ta có thể xét ổn định hệ kín như sau:

Hệ kín ổn định nếu hệ hở có độ dự trữ biên và độ dự trữ pha đều dương.

( Hệ kín ổn định ⇔ hệ hở có GM>0 dB và PM>0 ° )

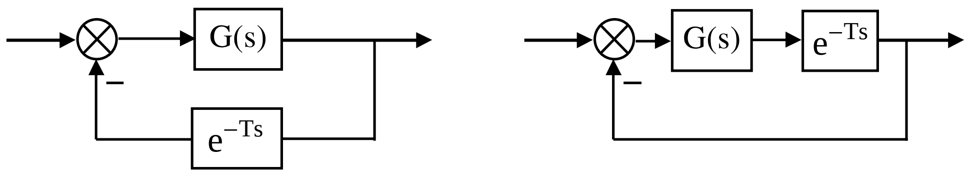
Trong thực tế, để đảm bảo hệ thống hoạt động ổn định thì :

Độ dự trữ biên GM = 10 ÷ 15 dB

Độ dự trữ pha PM = 30 ÷ 60°

### 4.3.5 Ổn định của hệ thống có khâu trễ

Xét các hệ thống có khâu trễ như hình vẽ :




a) b)

***Hình 4.13***

Hàm truyền hệ hở trong cả hai trường hợp a) và b):

$$G_h(s) = G(s)e^{-Ts}$$

Hàm truyền của hệ kín:

$$G_{ka}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)e^{-Ts}} \quad ; \quad G_{kb}(s) = \frac{G(s)e^{-Ts}}{1+G(s)e^{-Ts}}$$

Phương trình đặc tính hệ kín trong cả hai trường hợp:

$$1+G(s)e^{-Ts} = 0$$

Khai triển Taylor: $e^{-Ts} = 1 - Ts + \dfrac{T^2s^2}{2!} - \dfrac{T^3s^3}{3!} + \ldots$

Nếu dùng tiêu chuẩn ổn định đại số cho hệ thống có khâu trễ thì ta phải thay gần đúng $e^{-Ts}$ bằng tổng hữu hạn (ví dụ thay $e^{-Ts} = 1 - Ts$), như vậy việc tính toán phức tạp mà kết quả xét ổn định có thể không chính xác. Để tiện lợi hơn, người ta thường dùng tiêu chuẩn Nyquist.

Hàm truyền tần số hệ hở :

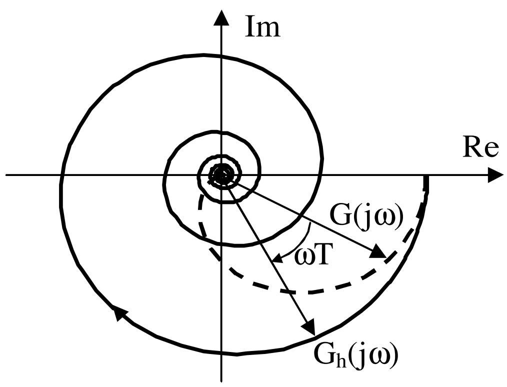
$$G_h(j\omega) = G(j\omega)e^{-j\omega T} = A(\omega)e^{j\omega}e^{-j\omega T}$$

Biên độ: $A_h(\omega) = A(\omega) = |G(j\omega)|$

Góc pha: $\varnothing_h(\omega) = \varnothing(\omega) - \omega T$

Như vậy, khâu trễ không ảnh hưởng tới biên độ mà chỉ tạo thêm góc lệch pha - $\omega T$.

Dựa vào biểu đồ Nyquist của phần không trễ ta có thể xây dựng được biểu đồ Nyquist của hệ thống có trễ. Để làm điều đó ta chỉ việc quay vectơ $G(j\omega_i)$ đi một góc $\omega_i T$ theo chiều kim đồng hồ. Lấy nhiều điểm $\omega_i$ ta sẽ vẽ được toàn bộ đường $G_h(j\omega)$. Khi tần số tăng lên thì góc $\omega_i T$ cũng tăng trong khi biên độ ở tần số cao lại giảm về 0 nên biểu đồ Nyquist có dạng đường xoắn ốc.




***Hình 4.14***

Từ biểu đồ ta thấy khi có thêm khâu chậm trễ thì độ dự trữ ổn định của hệ thống sẽ giảm đi.

**Ví dụ 4.12.** Cho hàm truyền của hệ hở là: $G(s) = \dfrac{Ke^{-Ts}}{T_1 s + 1}$

Hãy tìm giá trị T giới hạn để hệ kín hồi tiếp âm luôn ổn định.

***Giải.*** Xét trường hợp giới hạn ổn định, đường Nyquist đi qua điểm (-1,j0), khi đó tần số giới hạn $\omega_{gh} = \omega_c = \omega_{-\pi}$. Tức là tại tần số giới hạn $\omega_{gh}$ thì biên độ $A(\omega)=1$ và góc pha $\varnothing(\omega)=-\pi$.

Biên độ $A(\omega)$ không bị ảnh hưởng bởi khâu trễ. Do đó:

$$A(\omega_{gh}) = \left|G(j\omega_{gh})\right| = \left|\frac{K}{T_1 j\omega_{gh} + 1}\right| = \frac{K}{\sqrt{T_1^2\omega_{gh}^2 + 1}} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_{gh} = \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{T_1} \;;\; K > 1$$

Góc pha của hệ thống khi chưa có khâu trễ $e^{-Ts}$:

$$\phi(\omega_{gh}) = -\text{arctg}(T_1\omega_{gh}) = -\text{arctg}\sqrt{K^2 - 1}$$

Góc pha của hệ thống bao gồm cả khâu trễ:

$$\varnothing(\omega_{gh}) = \phi(\omega_{gh}) - T_{gh}\omega_{gh} = -\text{arctg}\sqrt{K^2 - 1} - T_{gh}\omega_{gh} = -\pi$$

Suy ra giá trị giới hạn của thời gian trễ T :

$$T_{gh} = \frac{\pi - \text{arctg}\sqrt{K^2 - 1}}{\omega_{gh}} = \frac{T_1}{\sqrt{K^2 - 1}}\left(\pi - \text{arctg}\sqrt{K^2 - 1}\right)$$

Để hệ kín luôn ổn định thì: $T \le T_{gh}$

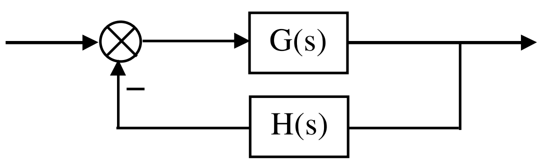
## 4.4 Phương pháp quỹ đạo nghiệm

### 4.4.1 Khái niệm

Quỹ đạo nghiệm (QĐN) là đồ thị biểu diễn tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính khi có một thông số nào đó của hệ thống thay đổi từ 0 $\rightarrow\infty$.

Quỹ đạo nghiệm được dùng để khảo sát ảnh hưởng của thông số thay đổi đến chất lượng hệ thống, ví dụ khảo sát tính ổn định của hệ thống khi hệ số khuếch đại (hay hằng số thời gian,...) thay đổi từ 0 $\rightarrow\infty$.

Xét hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ :




***Hình 4.15***

Hàm truyền của hệ hở: $G_0(s) = G(s)H(s)$

Phương trình đặc tính của hệ kín: $1 + G_0(s) = 0$

$$\Leftrightarrow \qquad G_0(s) = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|G_0(s)\right| = 1 & : \text{Điều kiện biên độ} \\ \arg\left[G_0(s)\right] = \pm i\pi \;\; (i=1,3,5...) & : \text{Điều kiện pha} \end{cases}$$

Muốn vẽ quỹ đạo nghiệm khi K là thông số thay đổi, trước tiên cần biến đổi phương trình đặc tính về dạng tuyến tính theo K :

$$1+G_0(s)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+K\frac{M(s)}{N(s)}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad N(s)+K.M(s)=0$$

Trong đó M(s) là đa thức bậc m; N(s) là đa thức bậc n. Thông thường $m \leq n$. $G_0(s)$ có m zero là nghiệm của M(s)=0 và n cực là nghiệm của N(s)=0.

### 4.4.2 Qui tắc xây dựng quỹ đạo nghiệm

1. Số nhánh của quỹ đạo nghiệm = số cực của $G_0(s)$ = bậc của phương trình đặc tính = n.
2. Các nhánh của quỹ đạo nghiệm xuất phát từ các cực của $G_0(s)$ khi K =0.
3. Khi $K\to\infty$ có m nhánh tiến tới m zero của $G_0(s)$, còn lại (n-m) nhánh tiến tới $\infty$ theo các tiệm cận.
4. Góc của các tiệm cận với trục thực xác định bởi:

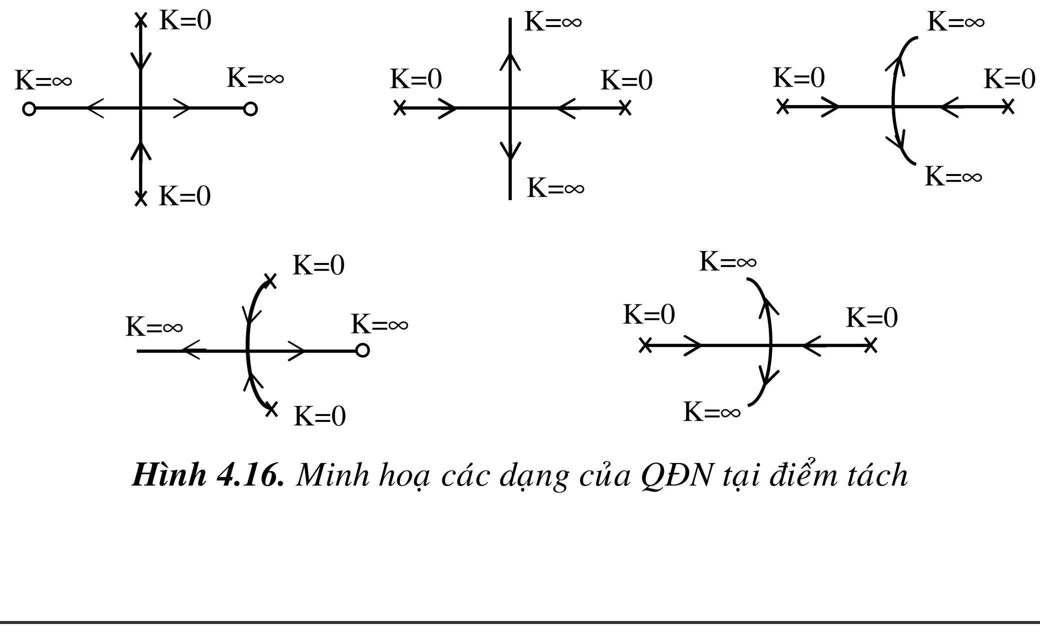
$$\alpha_i=\frac{(2i-1)\pi}{n-m} \qquad \text{với } i=1,2,...n-m$$

5. Các tiệm cận cùng giao nhau tại một điểm trên trục thực có hoành độ:

$$R_0=\frac{\sum \text{cực}-\sum \text{zero}}{n-m}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}$$

với $p_i$ : cực của $G_0(s)$ ; $z_i$ : zero của $G_0(s)$

6. Quỹ đạo nghiệm đối xứng qua trục thực vì các nghiệm phức luôn có từng cặp liên hợp.
7. Điểm tách: là điểm tại đó hai nhánh QĐN gặp nhau và sau đó tách ra khi K tăng. Điểm tách nằm trên trục thực và là nghiệm của phương trình $\frac{dK}{ds}=0$.




***Hình 4.16.*** *Minh hoạ các dạng của QĐN tại điểm tách*

8. Một điểm trên trục thực thuộc về QĐN nếu tổng số lượng điểm cực và zero của $G_0(s)$ bên phải nó là một số lẻ.
9. Giao điểm của QĐN với trục ảo có thể xác định bằng 2 cách :

- <u>Cách 1</u>: Dùng tiêu chuẩn Routh-Hurwitz để tìm K giới hạn ($K_{gh}$) rồi thay $K_{gh}$ vào phương trình đặc tính và giải tìm nghiệm ảo.
- <u>Cách 2</u>: Thay $s=j\omega$ vào phương trình đặc tính rồi cho phần thực và phần ảo bằng 0, sau đó giải ra tìm ω và K.

10. Góc xuất phát và góc đến của các nhánh được xác định từ điều kiện pha

$$\sum_{i=1}^{m}\arg(s-z_i)-\sum_{i=1}^{n}\arg(s-p_i)=\pm i\pi$$

Suy ra:

- Góc xuất phát tại cực $s=p_j$ khi K=0 :

$$\theta_{pj}=180°+\sum_{i=1}^{m}\arg(p_j-z_i)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\arg(p_j-p_i)$$

= 180 ° + (tổng các góc từ các zero đến cực $p_j$)

– (tổng các góc từ các cực còn lại đến cực $p_j$).

- Góc đến tại zero $s=z_j$ khi K=∞ :

$$\theta_{zj}=180°-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\arg(z_j-z_i)+\sum_{i=1}^{n}\arg(z_j-p_i)$$

11. Giá trị K dọc theo QĐN có thể xác định từ điều kiện biên độ

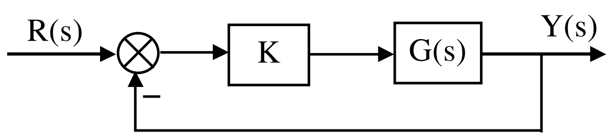
$$|G_0(s)|=\left|K\frac{M(s)}{N(s)}\right|=1$$

Suy ra giá trị K tại điểm $s_k$ bất kỳ trên QĐN :

$$K=\left|\frac{M(s)}{N(s)}\right|=\frac{\prod_{i=1}^{n}|s_k-p_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s_k-z_i|}=\frac{\text{Tích các khoảng cách từ điểm } s_k \text{ đến các cực}}{\text{Tích các khoảng cách từ điểm } s_k \text{ đến các zero}}$$

Khi hệ thống không có zero thì $K=\prod_{i=1}^{n}|s_k-p_i|$

**Ví dụ 4.13.** Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ :




$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

***Hình 4.17***

Hãy vẽ quỹ đạo nghiệm của hệ thống khi K thay đổi từ 0 →∞.

***Giải.*** Phương trình đặc tính của hệ thống :

$$1+KG(s)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{K}{s(s+1)(s+3)}=0$$

- Số nhánh, điểm xuất phát, điểm kết thúc, các tiệm cận

  Cực: có ba cực là $p_1= 0$ ; $p_2= -1$ ; $p_3= -3$

  Zero: không có

  Do đó quỹ đạo nghiệm gồm ba nhánh xuất phát từ các cực khi K=0.

  Khi $K\to\infty$, ba nhánh tiến tới $\infty$ theo các tiệm cận xác định bởi:

- Góc giữa các tiệm cận và trục thực

$$\alpha_i=\frac{(2i-1)\pi}{n-m}=\frac{(2i-1)\pi}{3-0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\alpha_1=\dfrac{\pi}{3} & (i=1)\\ \alpha_2=\pi & (i=2)\\ \alpha_3=\dfrac{5\pi}{3} & (i=3)\end{cases}$$

- Giao điểm giữa các tiệm cận và trục thực có hoành độ:

$$R_0=\frac{\sum \text{cực}-\sum \text{zero}}{n-m}=\frac{[0+(-1)+(-3)]}{3-0}=-\frac{4}{3}$$

- Xác định điểm tách của QĐN

  Ta viết lại phương trình đặc tính :

$$s(s+1)(s+3)+K=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (s^3+4s^2+3s)+K=0$$

$$\Leftrightarrow \quad K=-(s^3+4s^2+3s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dK}{ds}=-(3s^2+8s+3)$$

Do đó: $\dfrac{dK}{ds}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -(3s^2+8s+3)=0$

Giải ra ta được hai nghiệm $s_1$=-0,451 ; $s_2$= -2,215

Ta chỉ nhận giá trị phù hợp $s_1$= -0,451 là điểm tách. Giá trị $s_2$= -2,215 không phù hợp vì điểm này không thuộc về QĐN (kiểm tra tổng số cực và zero của $G_0(s)$ bên phải điểm này bằng 2, là số chẵn).

- Giao điểm của QĐN với trục ảo

***<u>Cách 1:</u>*** Dùng tiêu chuẩn Routh

Phương trình đặc tính $\quad s^3+4s^2+3s+K=0$

Bảng Routh:

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 4 | K |
| 3 – K/4 | 0 |
| K | |

Theo tiêu chuẩn Routh, điều kiện để hệ ổn định là:

$$\begin{cases} 3-\dfrac{K}{4}>0 \\ K>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0<K<12$$

Vậy hệ số khuếch đại giới hạn là $K_{gh}=12$.

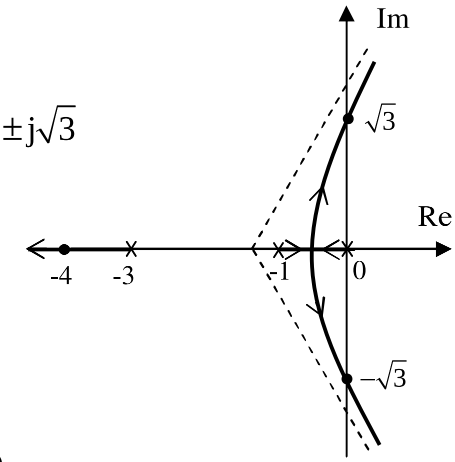
Thay $K_{gh}=12$ vào phương trình đặc tính ta có:

$$s^3+4s^2+3s+12=0$$

Giải ra ta được các nghiệm:

$$s_1=-4\,;\quad s_{2,3}=\pm j\sqrt{3}$$

Do đó QĐN cắt trục ảo tại hai điểm: $s=\pm j\sqrt{3}$ tương ứng với giá trị giới hạn K=12




***Hình 4.18***

***Cách 2:***

Thay s=jω vào PTĐT ta được

$$(j\omega)^3+4(j\omega)^2+3(j\omega)+K=0$$

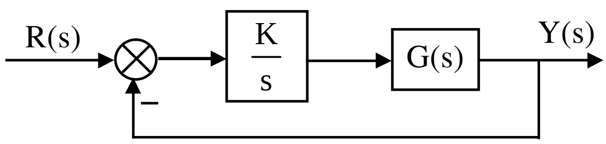
$$-j\omega^3-4\omega^2+3j\omega+K=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\omega^2+K=0 & \text{(phần thực)} \\ -\omega^3+3\omega=0 & \text{(phần ảo)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega=0;\ K=0 \\ \omega=\pm\sqrt{3}\,;\ K=12 \end{cases}$$

Quỹ đạo nghiệm của hệ thống được biểu diễn trên hình 4.18. Các điểm cực cũng là điểm xuất phát được ký hiệu bằng dấu x . Các nghiệm khi $K=K_{gh}=12$ được ký hiệu bằng dấu •. Với đường quỹ đạo nghiệm ta có được cái nhìn trực quan về sự phụ thuộc chất lượng hệ kín vào thông số K. Ví dụ, do quỹ đạo nghiệm cắt trục ảo tại K=12 và nằm bên phải trục ảo khi K>12 nên hệ thống sẽ không ổn định khi K>12 và ở giới hạn ổn định khi K=12 .

**Ví dụ 4.14.** Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ :




$$G(s)=\frac{1}{s^2+6s+13}$$

***Hình 4.19***

Hãy vẽ quỹ đạo nghiệm của hệ thống với $0<K<\infty$ .

***Giải.*** Phương trình đặc tính của hệ thống :

$$1+\frac{K}{s}G(s)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1+\frac{K}{s(s^2+6s+13)}=0$$

- Cực: có ba cực là $p_1=0$ ; $p_{2,3}=-3\pm j2$

  Zero: không có

  Do đó: Quỹ đạo nghiệm gồm ba nhánh xuất phát từ các cực khi K=0.

Khi K→∞, ba nhánh tiến tới ∞ theo các tiệm cận xác định bởi:

- Góc giữa các tiệm cận và trục thực

$$\alpha_i = \frac{(2i-1)\pi}{n-m} = \frac{(2i-1)\pi}{3-0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}\ ; \pi ; \frac{5\pi}{3}$$

- Giao điểm giữa các tiệm cận và trục thực có hoành độ:

$$R_0 = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[0+(-3+j2)+(-3-j2)]-0}{3-0} = -2$$

- Xác định điểm tách của QĐN

Viết lại phương trình đặc tính :

$$s(s^2+6s+13)+K=0$$

$$\Leftrightarrow \quad K = -s(s^2+6s+13) = -(s^3+6s^2+13s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dK}{ds} = -(3s^2+12s+13)$$

Do đó: $\quad \dfrac{dK}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(3s^2+12s+13) = 0$

Giải ra ta được hai nghiệm phức $s_{1,2}$=-2± j0,58 nên QĐN không có điểm tách.

- Giao điểm của QĐN với trục ảo:

Thay s=jω vào phương trình đặc tính ta được:

$$-j\omega^3 - 6\omega^2 + 13j\omega + K = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6\omega^2 + K = 0 \\ -\omega^3 + 13\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0;\ K = 0 \\ \omega = \pm\sqrt{13}\ ;\ K = 78 \end{cases}$$

Vậy các giao điểm cần tìm là $s = \pm j\sqrt{13} \approx \pm j3,6$ tương ứng với K= 78.

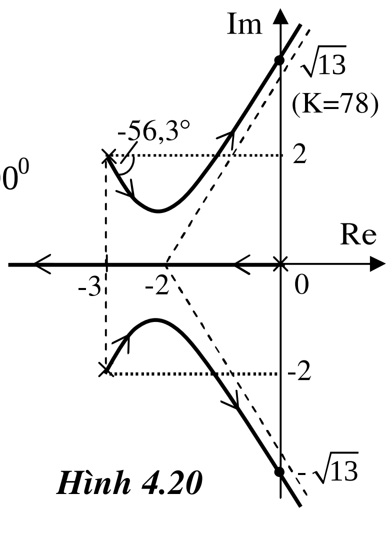
- Góc xuất phát từ cực phức $p_2$ (-3+2j) :

$$\theta_{p2} = 180° - [\arg(p_2 - p_1) + \arg(p_2 - p_3)]$$

$$\arg(p_2 - p_1) = \arg[(-3+j2) - 0] = \text{arctg}\frac{2}{-3} = -33,7°$$

$$\arg(p_2 - p_3) = \arg[(-3+j2) - (-3-j2)] = \text{arctg}\frac{4}{0} = 90^0$$

$$\Rightarrow \quad \theta_{p2} = 180 - (-33,7+90) = 123,7° \ \text{hay}\ -56,3^{\circ}$$




***Hình 4.20***

**Ví dụ 4.15.** Cho hệ hồi tiếp âm có hàm truyền vòng hở :

$$G_0(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+2)(s^2+6s+10)}$$

Hãy vẽ quỹ đạo nghiệm với $0< K < \infty$ .

***Giải.***

Phương trình đặc tính của hệ thống :

$$1 + G_0(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{K(s+5)}{s(s+2)(s^2+6s+10)} = 0$$

- Số nhánh, điểm xuất phát, điểm kết thúc, các tiệm cận

  Cực: có bốn cực là $p_1 = 0$ ; $p_2 = -2$ ; $p_{3,4} = -3 \pm j$

  Zero: $z_1 = -5$

  Quỹ đạo nghiệm gồm bốn nhánh xuất phát từ bốn cực khi K=0.

  Khi $K\to\infty$, một nhánh tiến đến $z_1$, ba nhánh còn lại tiến tới $\infty$ theo các tiệm cận xác định bởi:

  - Góc giữa các tiệm cận và trục thực

  $$\alpha_i = \frac{(2i-1)\pi}{n-m} = \frac{(2i-1)\pi}{4-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \;;\pi;\; \frac{5\pi}{3}$$

  - Giao điểm giữa các tiệm cận và trục thực có hoành độ:

  $$R_0 = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[0+(-2)+(-3+j)+(-3-j)]-(-5)}{4-1} = -1$$

- Điểm tách là nghiệm của phương trình $\frac{dK}{ds} = 0$

  Viết lại phương trình đặc tính :

  $$s(s+2)(s^2+6s+10) + K(s+5) = 0$$

  $$\Leftrightarrow \quad K = -\frac{s(s+2)(s^2+6s+10)}{(s+5)} = -\frac{s^4+8s^3+22s^2+20s}{(s+5)}$$

  $$\Rightarrow \quad \frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^4+36s^3+142s^2+220s+100)}{(s+5)^2}$$

  Do đó: $\frac{dK}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3s^4+36s^3+142s^2+220s+100 = 0$

  Giải ra ta được bốn nghiệm, nhưng chỉ có hai nghiệm phù hợp

  $$\begin{cases} s_1 = -5{,}98 \\ s_2 = -0{,}76 \\ s_{3,4} = -2{,}63 \pm 0{,}64j \quad \text{(loại bỏ)} \end{cases}$$

  Vậy quỹ đạo nghiệm có hai điểm tách s=-5,98 và s=-0,76.

- Giao điểm của QĐN với trục ảo:

  Phương trình đặc tính:

  $$s(s+2)(s^2+6s+10) + K(s+5) = 0$$

$\Leftrightarrow \qquad s^4 + 8s^3 + 22s^2 + (20+K)s + 5K = 0$

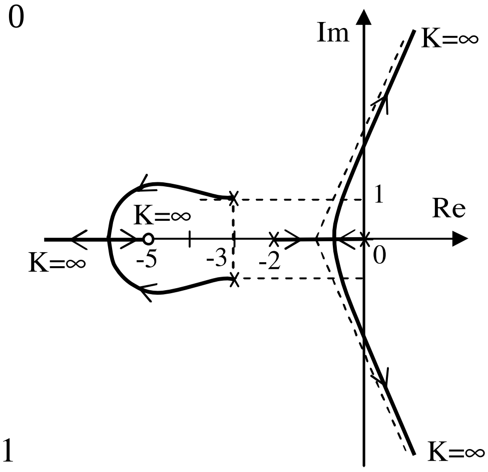
Thay s=jω vào ta được

$\omega^4 - 8j\omega^3 - 22\omega^2 + (20+K)j\omega + 5K = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^4 - 22\omega^2 + 5K = 0 \\ -8\omega^3 + (20+K)\omega = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0;\ K = 0 \\ \omega = \pm j4,74;\ K = -199,63 \text{ (loại bỏ)} \\ \omega = \pm 2,11;\ K = 15,63 \end{cases}$$

Vậy các giao điểm cần tìm là $s = \pm j2,11$ tương ứng với K= 15,63




***Hình 4.21***

- Góc xuất phát từ cực phức $p_3$ (-3+j) :

$$\theta_{p3} = 180° + \arg(p_3 - z_1) - [\arg(p_3 - p_1) + \arg(p_3 - p_2) + \arg(p_3 - p_4)]$$

$$\arg(p_3 - z_1) = \arg[(-3+j)+5] = \text{arctg}\frac{1}{2} = 26,6°$$

$$\arg(p_3 - p_1) = \arg[(-3+j)-0] = \text{arctg}\frac{1}{-3} = -18,4°$$

$$\arg(p_3 - p_2) = \arg[(-3+j)+2] = \text{arctg}\frac{1}{-1} = -45°$$

$$\arg(p_3 - p_4) = \arg[(-3+j)-(-3-j)] = \text{arctg}\frac{2}{0} = 90^0$$

Suy ra:

$$\theta_{p3} = 180 + (26,6) - (-18,4 - 45 + 90) = 180°$$

**Ví dụ 4.16.** Cho hệ hồi tiếp âm có hàm truyền vòng hở :

$$G_0(s) = \frac{400}{s(s+6)(s+a)}$$

Hãy vẽ quỹ đạo nghiệm của hệ thống khi hệ số a thay đổi từ $0 \to \infty$.

***Giải.***

Phương trình đặc tính của hệ thống :

$$1 + G_0(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 + \frac{400}{s(s+6)(s+a)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad s(s+6)(s+a) + 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad s^3 + 6s^2 + 400 + as(s+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 + \frac{as(s+6)}{s^3 + 6s^2 + 400} = 0$$

Các cực: $\quad p_1 = -10;\ \ p_2 = 2 + 6j;\ \ p_3 = 2 - 6j$

Các zero: $\quad z_1 = 0;\ \ z_2 = -6$

Quỹ đạo nghiệm gồm ba nhánh xuất phát từ các cực khi a=0. Khi a $\rightarrow\infty$, hai nhánh tiến đến các zero, một nhánh còn lại tiến tới $\infty$ theo tiệm cận.

- Góc giữa tiệm cận và trục thực

$$\alpha_i = \frac{(2i-1)\pi}{n-m} = \frac{(2i-1)\pi}{3-2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pi = 180° \qquad (i=1)$$

Đường tiệm cận chính là trục thực nên không cần tính giao điểm giữa tiệm cận và trục thực.

- Điểm tách là nghiệm của phương trình $\frac{da}{ds} = 0$

Viết lại phương trình đặc tính : $s^3 + 6s^2 + 400 + as(s+6) = 0$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{s^3 + 6s^2 + 400}{s^2 + 6s}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{da}{ds} = \frac{s^4 + 12s^3 + 36s^2 - 800s - 2400}{(s^2 + 6s)^2}$$

$$\frac{da}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s^4 + 12s^3 + 36s^2 - 800s - 2400 = 0$$

Giải ra ta được bốn nghiệm

$$\begin{cases} s_1 = -2,9 & \text{(chọn)} \\ s_2 = +6,9 & \text{(loại bỏ)} \\ s_{3,4} = -8 \pm j7,48 & \text{(loại bỏ)} \end{cases}$$

Ta chỉ chọn nghiệm phù hợp s=-2,9 là điểm tách.

- Giao điểm của QĐN với trục ảo:

Phương trình đặc tính:

$$s^3 + 6s^2 + 400 + as(s+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s^3 + (6+a)s^2 + 6as + 400 = 0$$

Thay s=jω vào ta được

$$-j\omega^3 - (6+a)\omega^2 + 6aj\omega + 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -(6+a)\omega^2 + 400 = 0 \\ -\omega^3 + 6a\omega = 0 \end{cases}$$

Giải ra ta được:

$$\begin{cases} \omega = 0; \quad a = \infty \\ \omega = \pm 5,85; \quad a = 5,7 \\ \omega = \pm j8,38; \quad a = -11,7 \quad \text{(loại bỏ)} \end{cases}$$

Vậy các giao điểm cần tìm là $s = \pm j5,85$, tương ứng với giá trị giới hạn a=5,7

- Góc xuất phát tại cực phức $p_2(2+j6)$:

$$\theta_{p2} = 180° + \sum_{i=1}^{m} \arg(p_2 - z_i) - \sum_{i=1;\, i\neq 2}^{n} \arg(p_2 - p_i)$$

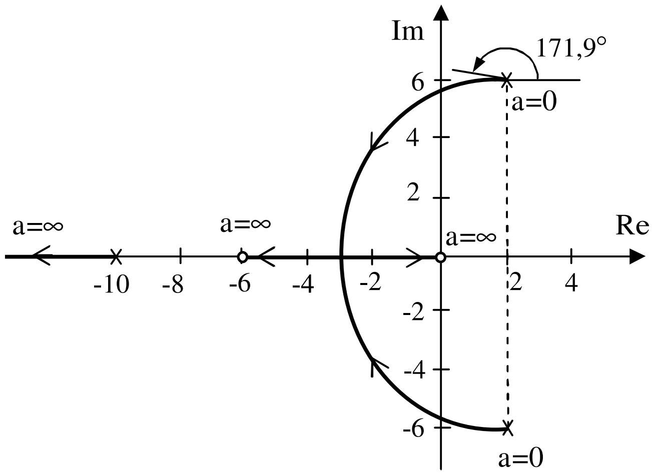
$$\arg(p_2 - z_1) = \arg[(2+j6) - 0] = \text{arctg}\frac{6}{2} = 71,6°$$

$$\arg(p_2 - z_2) = \arg[(2+j6) + 6] = \text{arctg}\frac{6}{8} = 36,9°$$

$$\arg(p_2 - p_1) = \arg[(2+j6) + 10] = \text{arctg}\frac{6}{12} = 26,6°$$

$$\arg(p_2 - p_3) = \arg[(2+j6) - (2-j6)] = \text{arctg}\frac{12}{0} = 90^0$$

$\Rightarrow \quad \theta_{p2} = 180 + (71,6 + 36,9) - (26,6 + 90) = 171,9°$




***Hình 4.22***

## Chương 5

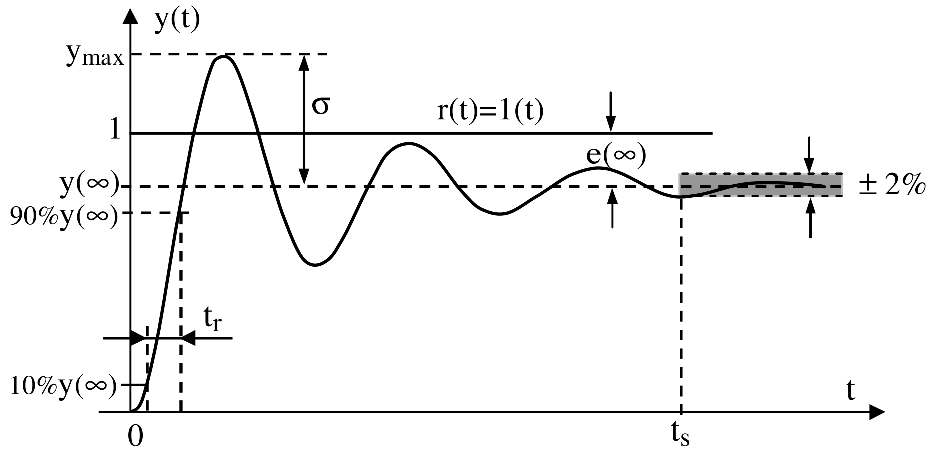
# CHẤT LƯỢNG HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN

### 5.1 Các chỉ tiêu chất lượng

Yêu cầu đầu tiên của một hệ thống điều khiển là ổn định. Tuy nhiên, yêu cầu này chưa đủ để đảm bảo hệ thống hoạt động tốt. Trong thực tế, hệ thống còn phải đồng thời thoả mãn nhiều yêu cầu khác, bao gồm các chỉ tiêu chất lượng của đáp ứng quá độ (chất lượng động học) và sai số xác lập (chất lượng tĩnh học), khả năng chống nhiễu,...

Thông thường, chất lượng động và tĩnh học của các hệ thống điều khiển được đánh giá thông qua đáp ứng quá độ đối với tín hiệu vào bậc thang đơn vị vì dễ thực hiện và đủ chính xác (Nếu biết được đáp ứng với tín hiệu vào bậc thang đơn vị thì có thể tính được đáp ứng của tín hiệu vào bất kỳ).

Khi tác động vào hệ thống một tín hiệu bậc thang đơn vị 1(t) thì đáp ứng đầu ra sẽ có dạng điển hình là dao động tắt dần như trên hình 5.1.




***Hình 5.1*** *Các thông số chất lượng của đáp ứng quá độ*

Chất lượng của hệ thống được đánh giá qua các thông số (chỉ tiêu) sau:

- **Thời gian quá độ $t_s$ hay $t_{set}$** (settling time) : là thời gian cần thiết để tín hiệu ra đạt và duy trì được giá trị xác lập $y(\infty)$ với sai số cho phép $\pm 2\%$ (hoặc $\pm 5\%$ ).

- **Độ vọt lố s% hay POT** (độ quá điều chỉnh, Percent Overshoot): là sai lệch giữa giá trị cực đại và giá trị xác lập của đáp ứng, tính theo phần trăm :

$$POT = \sigma\% = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} 100\% \qquad (5\text{-}1)$$

Hai chỉ tiêu độ vọt lố và thời gian quá độ thường trái ngược nhau: để có độ vọt lố nhỏ thì thời gian quá độ sẽ lớn và ngược lại.

- **Sai số xác lập e(¥) hay $e_{ss}$** (steady-state error): là sai lệch giữa tín hiệu vào và tín hiệu hồi tiếp ở trạng thái xác lập. Sai số xác lập đặc trưng cho độ chính xác của hệ thống điều khiển.

Tổng quát : $e(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} e(t) = \lim\limits_{s \to 0} s.E(s)$ (5-2)

Với hệ hồi tiếp âm đơn vị và tín hiệu vào là hàm 1(t) thì :

$$e(\infty) = 1 - y(\infty) = 1 - \lim_{t \to \infty} h(t) = 1 - \lim_{s \to 0} G_k(s) \qquad (5\text{-}3)$$

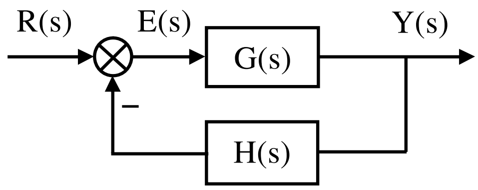
Ngoài các thông số trên, người ta còn xét đến các thông số phụ là:

- Thời gian tăng trưởng $\mathbf{t_r}$ (rise time) : Là thời gian cần thiết để đáp ứng tăng từ 10% đến 90% giá trị xác lập $y(\infty)$.
- Thời gian để y(t) đạt 50% giá trị xác lập $\mathbf{t_d}$ (delay time).
- Thời gian lên đỉnh $\mathbf{t_p}$ hay $\mathbf{t_{peak}}$ : thời gian cần để đáp ứng đạt giá trị cực đại.
- Số chu kỳ dao động trước khi đáp ứng đạt giá trị xác lập.

## 5.2 Phân tích sai số xác lập

Sai số xác lập không những phụ thuộc vào cấu trúc và thông số của hệ thống mà còn phụ thuộc vào loại tín hiệu vào.

Xét hệ thống hồi tiếp âm có sơ đồ như hình 5.2.




***Hình 5.2***

Hàm truyền của hệ thống ở trạng thái hở (hệ hở) :

$$G_h(s) = G(s)H(s)$$

Hàm truyền của hệ kín:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Sai số của hệ thống viết theo dạng toán tử Laplace:

$$E(s) = R(s) - Y(s)H(s) = R(s) - \frac{R(s)G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Sai số xác lập:

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \qquad (5\text{-}4)$$

### 1) Tín hiệu vào bậc thang đơn vị

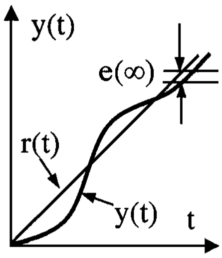
$r(t) = 1(t) \Rightarrow R(s) = 1/s$

$$\Rightarrow \qquad e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{s \to 0} G(s)H(s)}$$

Nếu gọi $K_P = \lim\limits_{s \to 0} G(s)H(s)$ là hệ số sai số vị trí thì :

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_P} \qquad (5\text{-}5)$$

**2) Tín hiệu vào là hàm dốc đơn vị**



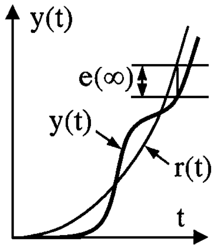

$$r(t) = t.1(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \qquad e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)}.\frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s)}$$

Nếu gọi $K_V = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s)$ là hệ số sai số vận tốc thì :

$$e(\infty) = \frac{1}{K_V} \qquad (5\text{-}6)$$

**3) Tín hiệu vào là hàm parabol**




$$r(t) = \frac{t^2}{2}1(t) \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$\Rightarrow \qquad e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)}.\frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)H(s)}$$

Nếu gọi $K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)H(s)$ là hệ số sai số gia tốc thì :

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} \qquad (5\text{-}7)$$

***Nhận xét:***

Tuỳ theo số khâu tích phân lý tưởng có trong hàm truyền hệ hở G(s)H(s) mà $K_P$, $K_V$ , $K_a$ có giá trị như bảng sau:

| Số khâu tích phân có trong G(s)H(s) | $K_P$ | $K_V$ | $K_a$ |
|---|---|---|---|
| 0 | < ∞ (hữu hạn) | 0 | 0 |
| 1 | ∞ | < ∞ (hữu hạn) | 0 |
| 2 | ∞ | ∞ | < ∞ (hữu hạn) |
| ≥ 3 | ∞ | ∞ | ∞ |

- Nếu hệ hở không có khâu tích phân lý tưởng thì hệ thống kín theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào 1(t) với sai số $e(\infty) = \frac{1}{1+K_P}$ và không theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm dốc và hàm parabol.
- Nếu hệ hở có một khâu tích phân lý tưởng thì hệ thống kín theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào 1(t) với sai số e( ∞)=0 và theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm dốc với sai số $e(\infty) = 1/K_V$ và không theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm parabol. Hệ thống loại này được gọi là hệ vô sai bậc một.
- Nếu hệ hở có hai khâu tích phân lý tưởng thì hệ thống kín theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào 1(t) và hàm dốc với sai số e( ∞)=0 và theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào là hàm parabol với sai số $e(\infty) = 1/K_a$. Hệ thống loại này được gọi là hệ vô sai bậc hai.

- Nếu hệ hở có ba khâu tích phân lý tưởng thì hệ thống kín theo kịp sự thay đổi của tín hiệu vào 1(t), hàm dốc và hàm parabol với sai số $e(\infty)=0$ . Hệ thống loại này được gọi là hệ vô sai bậc ba.
- Hệ thống có n khâu tích phân lý tưởng gọi là hệ vô sai bậc n.

## 5.3 Phân tích đáp ứng quá độ

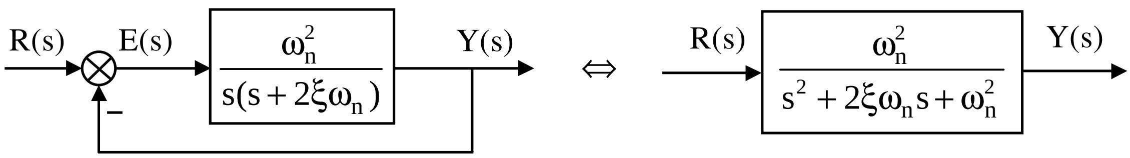
### 1) Hệ bậc hai

Việc khảo sát đáp ứng của hệ bậc hai rất được quan tâm vì:

- Nhiều hệ thống trong thực tế có hàm truyền bậc hai, như mạch RLC, động cơ DC điều khiển tốc độ bằng điện áp phần ứng, các hệ cơ khí mbk ,...
- Các hệ thống bậc cao có thể được xấp xỉ về hệ bậc hai để tiến hành phân tích và thiết kế sơ bộ với một độ chính xác hợp lý.

Xét hệ bậc hai có hàm truyền dạng:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$




Tín hiệu vào là hàm bậc thang đơn vị r(t)=1(t).

Từ chương 3 ta biết :

Ø Khi $\xi > 1$, hệ có hai cực thực riêng biệt : $s_1 = -(1/T_1)$ và $s_2 = -(1/T_2)$

với $T_1.T_2 = T^2$ và $T_1+T_2 = 2\xi T$.

Đáp ứng quá độ không dao động :

$$y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2}.e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}.e^{-t/T_2} \qquad (5\text{-}8)$$

Ø Khi $\xi = 1$, hệ có cặp cực thực, bội: $s_1 = s_2 = -(1/T) = -\omega_n$

Đáp ứng quá độ không dao động :

$$y(t) = 1 - e^{-t/T} - \frac{t}{T}e^{-t/T} = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} \qquad (5\text{-}9)$$

Ø Khi $0 < \xi < 1$ hệ có cặp cực phức liên hợp $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

Đáp ứng quá độ là dao động tắt dần:

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega t\right) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega t + \varnothing) \qquad (5\text{-}10)$$

trong đó : $\omega_n = \frac{1}{T}$ ; $\omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ ; $\varnothing = \arccos\xi$ ; (5-11)

Chúng ta sẽ phân tích trường hợp điển hình là đáp ứng dao động tắt dần.

**a) Độ vọt lố POT** :

Độ vọt lố xảy ra tại thời điểm tương ứng với điểm cực đại lớn nhất của y(t). Do đó cần tính đạo hàm của y(t) và giải phương trình đạo hàm để tìm cực trị.

$$\frac{dy}{dt} = \xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega t\right) + e^{-\xi\omega_n t}\left(\omega\sin\omega t - \frac{\xi\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos\omega t\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega t$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{n\pi}{\omega}; \quad n = 0,1,2,... \tag{5-12}$$

n= 2k (k=0,1,2...) : ứng với các cực tiểu,

n= 2k+1 : ứng với các cực đại.

Điểm cực đại lớn nhất ứng với n=1 và $t = t_{peak} = \pi/\omega$ nên:

$$y_{max} = 1 + e^{\left(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

Độ vọt lố : $\quad POT = \dfrac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} = y_{max} - 1$

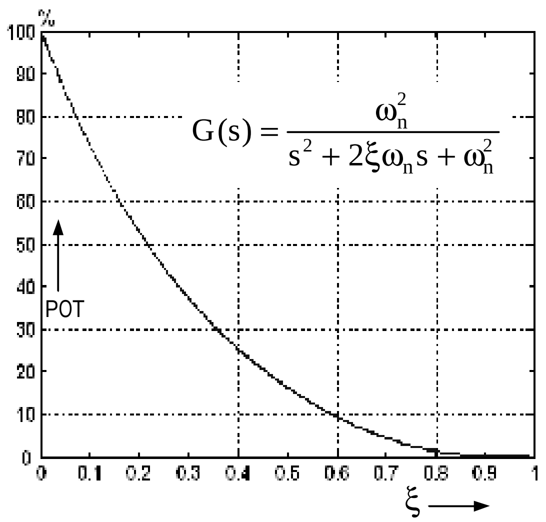
$$\Rightarrow \qquad \boxed{POT = e^{\left(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}.100\%} \tag{5-13a}$$

Đặt $\beta = \sqrt{1-\xi^2}$ thì: $\boxed{POT = e^{(-\pi\xi/\beta)}.100\%}$ (5-13b)

Ta thấy độ vọt lố POT của hệ bậc hai dao động chỉ phụ thuộc hệ số tắt dần $\xi$. Khi $\xi$ tăng thì POT giảm và ngược lại.

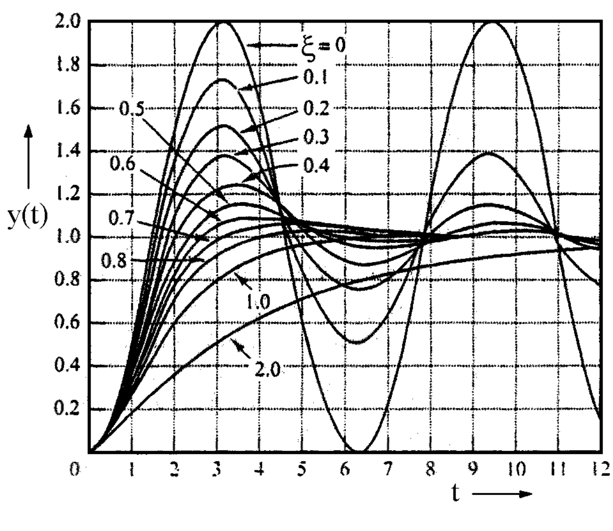
Với $\xi = 0{,}7$ thì $POT = 4{,}6\%$

Với $\xi = 0{,}3$ thì $POT = 37{,}2\%$ .




***Hình 5.3***

*Đường cong POT theo x*




***Hình 5.4***

*Đáp ứng quá độ hệ bậc 2*

**b) Thời gian quá độ**

- Theo tiêu chuẩn 2% :

$$\left|y_{min,max} - y(\infty)\right| = 2\% \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{\left(-n\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)} = 0,02$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{\ln 50}{\pi\xi}\sqrt{1-\xi^2} \approx \frac{4}{\pi\xi}\sqrt{1-\xi^2} \qquad (5\text{-}14)$$

Do đó số lần dao động quanh giá trị xác lập trong thời gian quá độ:

$N = \frac{n}{2} = \frac{2}{\pi\xi}\sqrt{1-\xi^2}$ : được quy tròn về số nguyên gần nhất.

Thời gian quá độ theo tiêu chuẩn 2%:

$$t_s = \frac{n\pi}{\omega} \approx \frac{4}{\xi\omega_n} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}} \qquad (5\text{-}15)$$

- Theo tiêu chuẩn 5% :

Tính toán tương tự ta có: $\boxed{t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}}$ (5-16)

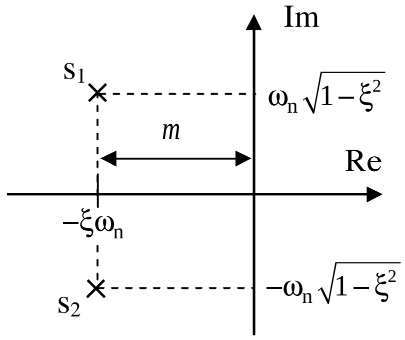
**c) Thời gian tăng trưởng :**

Được tính theo công thức:

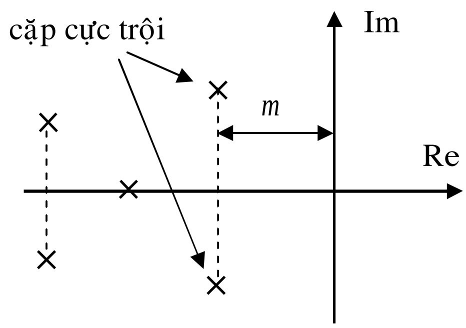
$$\boxed{t_r = \frac{1}{\omega_n}\left(1,589\xi^3 - 0,1562\xi^2 + 0,924\xi + 1,0141\right)} \qquad (5\text{-}17)$$

**2) Hệ bậc cao**

Hệ bậc cao có nhiều hơn hai cực. Đáp ứng tương ứng với các cực nằm càng xa trục ảo suy giảm càng nhanh. Do đó có thể xấp xỉ hệ bậc cao về hệ bậc hai với hai cực nằm gần trục ảo nhất, gọi là ***cặp cực trội*** hay cặp cực quyết định.




***Hình 5.5*** *Cặp cực của hệ bậc hai dao động*




***Hình 5.6***
*Cặp cực trội của hệ bậc 5*

**Độ dự trữ ổn định :** Trong miền thời gian, độ dự trữ ổn định $m$ được định nghĩa là khoảng cách từ trục ảo đến nghiệm cực (thực hoặc phức) gần nhất. Nói cách khác, hệ có độ dự trữ ổn định $m \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s_i) \le -m$ với $s_i$ (i=1,2,..n) là các cực của hệ.

Nếu $m$ càng lớn thì quá trình quá độ càng nhanh về xác lập, tính ổn định của hệ càng cao.

**Ví dụ 5.1.** Cho hệ thống có hàm truyền: $G(s) = \dfrac{1600}{s^2 + 20s + 1600}$

Hãy tìm POT ; $t_s$ theo chuẩn 2%

***Giải.***

Ta có : $\omega_n = \sqrt{1600} = 40$

$$2\xi\omega_n = 20 \Rightarrow \xi = 0,25$$

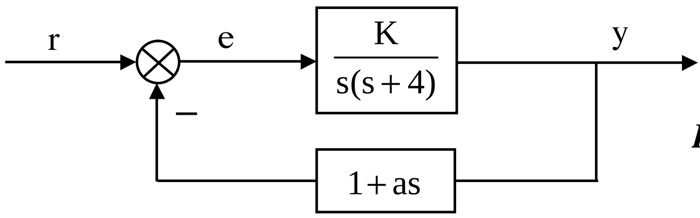
$$\beta = \sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-0,25^2} = 0,968$$

$$\frac{\pi\xi}{\beta} = \frac{0,25\pi}{0,968} = 0,81$$

Độ vọt lố : $POT = e^{\frac{-\pi\xi}{\beta}} = e^{-0,811}.100\% = 44,43\%$

Thời gian quá độ: $t_s = \dfrac{4}{\xi\omega_n} = \dfrac{4}{(0,25).(40)} = 0,4\sec$

**Ví dụ 5.2.** Cho hệ thống có sơ đồ như hình 5.7. Xác định giá trị hệ số K và a để hệ có $\omega_n$ = 5 rad/s và $\xi = 0,7$ .



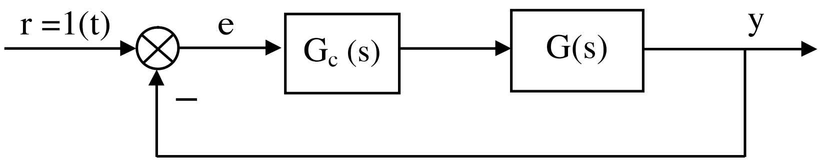

***Hình 5.7***

***Giải.*** Hàm truyền của hệ thống :

$$G_k(s) = \frac{\dfrac{K}{s(s+4)}}{1+\dfrac{K(1+as)}{s(s+4)}} = \frac{K}{s^2+(4+Ka)s+K}$$

Suy ra: $\omega_n{}^2 = K = 25$ ; $a = \dfrac{2\xi\omega_n - 4}{25} = \dfrac{2(0,7)(5)-4}{25} = 0,12$

**Ví dụ 5.3.** Xét hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ .




a) Khảo sát đáp ứng của hệ thống với :

Bộ điều khiển P : $G_C(s) = K_P = 1$

Đối tượng điều khiển $PT_2$ : $G(s) = \dfrac{20}{s^2 + 8s + 12}$

b) Khảo sát tính ổn định và sai số xác lập của hệ với :

Bộ điều khiển P : $G_C(s) = K_P > 0$ tuỳ ý

Đối tượng điều khiển $PT_2$ : $G(s) = \dfrac{K}{T^2s^2 + 2xTs + 1}$

***Giải.***

a) Khảo sát hệ thống với $K_P = 1$.

Hàm truyền của hệ thống:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_P G(s)}{1 + K_P G(s)} = \frac{\dfrac{20}{s^2+8s+12}}{1 + \dfrac{20}{s^2+8s+12}} = \frac{20}{s^2+8s+32}$$

Hàm quá độ $h(t) = y(t)\big|_{r(t)=1(t)}$

Ảnh Laplace của hàm quá độ:

$$H(s) = L[h(t)] = \frac{G_k(s)}{s} = \frac{20}{s(s^2+8s+32)} = \frac{20}{s[(s+4)^2+4^2]}$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{5}{8}\left(\frac{1}{s} - \frac{(s+4)}{(s+4)^2+(4)^2} - \frac{(4)}{(s+4)^2+(4)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = L^{-1}[H(s)] = \frac{5}{8}\left(1 - e^{-4t}\cos 4t - e^{-4t}\sin 4t\right)$$

$$= \frac{5}{8} - \frac{5}{8}e^{-4t}\left(\cos 4t + \sin 4t\right)$$

$$= \frac{5}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{8}e^{-4t}\sin(4t + 45^\circ)$$

Giá trị xác lập: $h(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \dfrac{5}{8}$

Sai số xác lập: $e(\infty) = 1 - h(\infty) = 1 - \dfrac{5}{8} = \dfrac{3}{8} > 0$

Để tính toán độ vọt lố và các chỉ tiêu thời gian, ta cần chuyển hàm truyền của hệ về dạng chuẩn của hệ bậc hai như sau:

$$G_k(s) = \frac{20}{s^2+8s+32} = \frac{K_2\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Với: $K_2 = 20/32 = 5/8$ : hệ số khuếch đại của hệ.

Do hệ tuyến tính thoả nguyên lý xếp chồng nên hệ số khuếch đại $K_2$ chỉ có tác dụng nhân tỉ lệ biên độ, hoàn toàn không làm thay đổi dạng đường đáp ứng quá độ. Do đó $K_2$ chỉ làm thay đổi giá trị xác lập $h(\infty)$ và sai số xác lập $e(\infty)$. $K_2$ không ảnh hưởng tới độ vọt lố POT (vì tính theo %) và các thông số thời gian của hệ thống, các thông số này được tính tương tự như khi $K_2 = 1$.

$$\omega_n = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = 5,657$$

$$2\xi\omega_n = 8 \Rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$$

$$\beta = \sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-(1/2)} = \sqrt{2}/2 = 0,707$$

$$\frac{\pi\xi}{\beta} = \frac{0,707\pi}{0,707} = \pi = 3,14$$

Độ vọt lố : $\quad POT = e^{\left(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)} = e^{\frac{-\pi\xi}{\beta}} = e^{-\pi}.100\% = 4,32\%$

Thời gian lên đỉnh: $t_{peak} = \dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{\pi}{\omega_n\beta} = \dfrac{\pi}{4} = 0,785 \text{ sec}$

Thời gian quá độ: $\quad t_s \approx \dfrac{4}{\xi\omega_n} = \dfrac{4}{4} = 1\text{sec}$

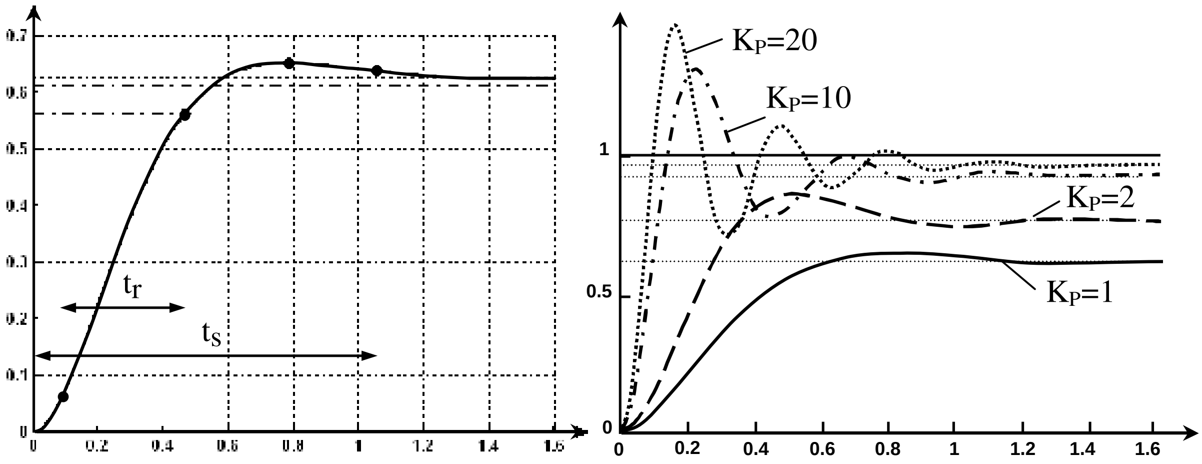
(Nếu giải phương trình: $h(t) = \dfrac{5}{8} - \dfrac{5\sqrt{2}}{8}e^{-4t}\ \sin(4t+45°) = \dfrac{5}{8}(1 \pm 0,02)$

, ta có giá trị chính xác là $t_S$ =1,05 sec)

Thời gian tăng trưởng:

$$t_r = \frac{1}{\omega_n}\left(1,589\xi^3 - 0,1562\xi^2 + 0,924\xi + 1,0141\right) = 0,38 \text{ sec}$$

Đáp ứng của hệ thống với $K_P$=1 được vẽ trên hình 5.8 (a).




(a) (b)

***Hình 5.8*** *Đáp ứng quá độ của hệ thống cho ở ví dụ 5.3*

b) Khảo sát hệ thống khi hệ số khuếch đại $K_P$ >0 thay đổi tuỳ ý.

Hàm truyền của hệ :

$$G_k(s) = \frac{\dfrac{KK_P}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}}{1 + \left(\dfrac{KK_P}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}\right)} = \frac{KK_P}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1 + KK_P}$$

Phương trình đặc tính của hệ:

$$T^2s^2 + 2\xi Ts + 1 + KK_P = 0$$

Ta biết điều kiện cần và đủ để hệ bậc hai ổn định là các hệ số của phương trình đặc tính đều dương. Do đó hệ thống luôn ổn định với mọi giá trị $K_P>0$

Theo định lý giá trị cuối:

$$h(\infty) = \lim_{s\to 0} G_k(s) = \frac{KK_P}{1+KK_P} < 1 \quad \forall \ K_P > 0$$

Do đó sai số xác lập:

$$e(\infty) = 1 - h(\infty) = \frac{1}{1+KK_P} > 0 \quad \forall \ K_P > 0$$

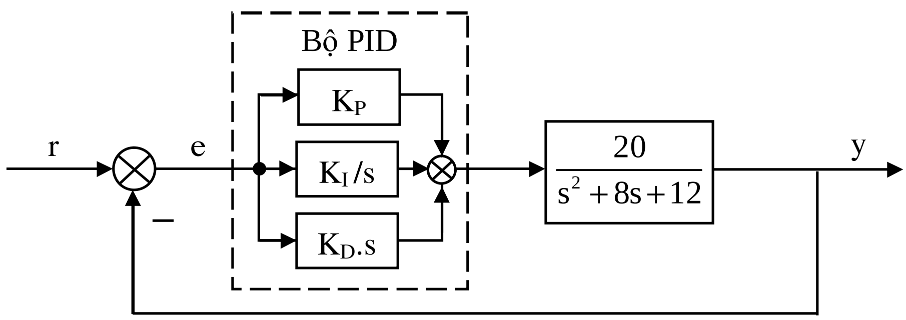
Đáp ứng của hệ kín khi $K_P$ thay đổi được vẽ trên hình 5.8(b).

***Nhận xét:***

- Nếu dùng bộ P kết hợp với đối tượng điều khiển loại $PT_1$, $PT_2$ thì hệ kín ổn định $\forall \ K_P > 0$ và luôn có sai số xác lập $e(\infty) \neq 0$. Khi tăng hệ số khuếch đại $K_P$ thì sai số xác lập sẽ giảm, rút ngắn được thời gian quá độ nhưng lại làm tăng tính dao động của đáp ứng (tức là tăng độ vọt lố).
- Nếu dùng bộ P kết hợp với đối tượng có bậc hàm truyền >2 (ví dụ, đối tượng gồm $n_1$ khâu $PT_1$ nối tiếp với $n_2$ khâu $PT_2$,...) thì phương trình đặc tính của hệ kín cũng có bậc>2, vì vậy khi tăng $K_P$ vượt quá giá trị giới hạn, hệ thống sẽ mất ổn định.

Tóm lại, bộ điều chỉnh P với hệ số $K_P$ chọn phù hợp cho phép đáp ứng của hệ kín nhanh chóng đạt giá trị xác lập với sai số nhất định (trừ trường hợp hàm truyền hệ hở có khâu I thì hệ kín có sai số xác lập bằng 0).

**Ví dụ 5.4.** Xét hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ:




a) Khảo sát đáp ứng của hệ thống với :

Bộ điều khiển PID có thông số $K_P=12$; $K_I=36$; $K_D=1$.

Đối tượng điều khiển $PT_2$: $G(s) = \dfrac{20}{s^2+8s+12}$

b) Giữ nguyên $K_P = 12$ ; $K_D= 1$ và thay đổi giá trị $K_I >0$ tuỳ ý.

Khảo sát tính ổn định và sai số xác lập của hệ thống.

**Giải. a)** Khảo sát hệ thống với $K_P = 12$; $K_I = 36$; $K_D = 1$.

Hàm truyền của bộ PID:

$$G_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} = \frac{s^2 + 12s + 36}{s}$$

Hàm truyền mạch hở:

$$G_h(s) = G_{PID}(s).G(s) = \left(\frac{s^2 + 12s + 36}{s}\right)\left(\frac{20}{s^2 + 8s + 12}\right)$$

$$= \left(\frac{(s+6)^2}{s}\right)\left(\frac{20}{(s+2)(s+6)}\right) = \frac{20(s+6)}{s(s+2)}$$

Hàm truyền của hệ thống:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{PID}(s).G(s)}{1 + G_{PID}(s).G(s)} = \frac{20(s+6)}{s^2 + 22s + 120}$$

Ảnh Laplace của hàm quá độ:

$$H(s) = L[h(t)] = \frac{G_k(s)}{s} = \frac{20(s+6)}{s(s^2 + 22s + 120)} = \frac{20(s+6)}{s(s+10)(s+12)}$$

Mẫu số của H(s) có 3 nghiệm đơn $s = 0$; $s = -10$; $s = -12$

Do đó có thể phân tích:

$$H(s) = \frac{20(s+6)}{s(s+10)(s+12)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+10} + \frac{A_3}{s+12}$$

$$A_1 = \lim_{s\to 0}[sH(s)] = \lim_{s\to 0} \frac{20(s+6)}{(s+10)(s+12)} = 1$$

$$A_2 = \lim_{s\to -10}[(s+10)H(s)] = \lim_{s\to -10} \frac{20(s+6)}{s(s+12)} = \frac{-80}{-20} = 4$$

$$A_3 = \lim_{s\to -12}[(s+12)H(s)] = \lim_{s\to -12} \frac{20(s+6)}{s(s+10)} = \frac{-120}{24} = -5$$

$\Rightarrow$ $$H(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s+10} - \frac{5}{s+12}$$

$\Rightarrow$ Hàm quá độ: $h(t) = L^{-1}[H(s)] = 1 + 4e^{-10t} - 5e^{-12t}$

Giá trị xác lập : $h(\infty) = \lim_{t\to\infty} h(t) = 1$

Sai số xác lập : $e(\infty) = 1 - h(\infty) = 0$

**b)** Khảo sát hệ thống với $K_P = 12$; $K_D = 1$; $K_I > 0$

Hàm truyền của hệ thống :

$$G_k(s) = \frac{G_{PID}(s).G(s)}{1 + G_{PID}(s).G(s)} = \frac{\left(\frac{s^2 + 12s + K_I}{s}\right)\left(\frac{20}{s^2 + 8s + 12}\right)}{1 + \left(\frac{s^2 + 12s + K_I}{s}\right)\left(\frac{20}{s^2 + 8s + 12}\right)} = \frac{20(s^2 + 12s + K_I)}{s^3 + 28s^2 + 252s + 20K_I}$$

Phương trình đặc tính của hệ:

$$s^3 + 28s^2 + 252s + 20K_I = 0$$

Lập bảng Routh :

| | |
|---|---|
| 1 | 252 |
| 28 | $20K_I$ |
| $\dfrac{(28)(252) - 20K_I}{28}$ | 0 |
| $20K_I$ | 0 |

Theo tiêu chuẩn Routh, điều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định là các hệ số ở cột thứ nhất của bảng Routh đều dương. Tức là:

$$\begin{cases} (28)(252) - 20K_I > 0 \\ 20K_I > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < K_I < 352{,}8$$

Do đó hệ thống kín chỉ ổn định khi thông số $K_I$ có giá trị trong giới hạn:

$$0 < K_I < 352{,}8$$

Với hệ thống ổn định ta có thể áp dụng định lý giá trị cuối :

$$h(\infty) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} G_k(s) = \frac{20K_I}{20K_I} = 1$$

$$\Rightarrow \quad e(\infty) = 1 - h(\infty) = 0 \qquad \forall \;\; 0 < K_I < K_{Igh} = 352{,}8$$

***Nhận xét***

- Nếu chỉ sử dụng riêng thành phần $K_P$ thì sai số xác lập $e(\infty)$ luôn tồn tại ($\neq 0$). Tăng $K_P$ sẽ làm tăng tốc độ đáp ứng của hệ kín, giảm thời gian quá độ và sai số xác lập nhưng lại làm tăng tính dao động của hệ (tăng độ vọt lố). Với đối tượng có bậc hàm truyền > bậc 2 thì khi $K_P$ tăng quá cao, hệ thống sẽ mất ổn định.

- Nếu sử dụng thêm thành phần $K_I$ thì trong phạm vi hệ thống còn ổn định, sai số xác lập $e(\infty)$ luôn bằng 0. Tăng $K_I$ sẽ làm tăng tốc độ đáp ứng của hệ kín, giảm thời gian quá độ nhưng lại làm tăng độ vọt lố . Khi $K_I$ tăng quá giới hạn, hệ thống sẽ mất ổn định.

- Thành phần $K_D$ có tác dụng làm giảm dao động, giảm độ vọt lố nhưng không ảnh hưởng đến sai số xác lập của hệ thống. Tín hiệu ra của thành phần $K_D$ tỉ lệ với đạo hàm của e(t) nên tác dụng hiệu chỉnh của nó chủ yếu là ở giai đoạn đầu của đáp ứng quá độ.

Phối hợp cả ba thành phần $K_P$, $K_D$, $K_I$ với giá trị được lựa chọn thích hợp, ta có thể hiệu chỉnh để hệ thống kín ổn định, sai số $e(\infty)=0$, thời gian quá độ và độ vọt lố đạt yêu cầu mong muốn.

### 5.4 Các tiêu chuẩn tối ưu hoá đáp ứng quá độ

Bên cạnh phương pháp trực tiếp để đánh giá chất lượng quá độ là tìm và phân tích hàm quá độ bằng cách giải phương trình vi phân hay ứng dụng phép biến đổi Laplace ngược, người ta còn dùng phương pháp gián tiếp là đánh giá dựa vào các tiêu chuẩn tối ưu hoá. Các tiêu chuẩn này tìm điều kiện để đáp ứng của hệ đạt được sự dung hoà tốt nhất giữa thời gian quá độ và độ vọt lố. Hệ thống đạt chất lượng tốt nhất khi giá trị các tích phân dưới đây là cực tiểu.

**1) Tiêu chuẩn IAE** (Integral of the Absolute magnitude of the Error criterion – Tiêu chuẩn tích phân của trị tuyệt đối biên độ sai số )

$$S_1 = \int_0^\infty |e(t)|dt \rightarrow \min$$

Đối với hệ bậc hai: $S_1 \rightarrow \min$ khi $\xi = 0{,}707$

**2) Tiêu chuẩn ISE** (Integral of the Square of the Error criterion – Tiêu chuẩn tích phân của bình phương sai số )

$$S_2 = \int_0^\infty e^2(t)dt \rightarrow \min$$

Đối với hệ bậc hai: $S_2 \rightarrow \min$ khi $\xi = 0{,}5$

**3) Tiêu chuẩn ITAE** (Integral of Time multiplied by the Absolute value of the Error criterion – Tiêu chuẩn tích phân của tích thời gian và trị tuyệt đối sai số)

$$S_3 = \int_0^\infty t|e(t)|\,dt \rightarrow \min$$

Đối với hệ bậc hai: $S_3 \rightarrow \min$ khi $\xi = 0{,}707$

Trong ba tiêu chuẩn trên, tiêu chuẩn ITAE được sử dụng nhiều nhất.

- Để đáp ứng quá độ của hệ kín bậc n là tối ưu theo tiêu chuẩn ITAE và hệ kín có sai số xác lập vị trí bằng 0 thì hàm truyền hệ kín bậc n phải có tử số là $\omega_n^{\,n}$ và đa thức mẫu số (cũng chính là đa thức đặc tính của hệ kín) có dạng như bảng sau :

| Bậc | Mẫu số hàm truyền |
|---|---|
| 1 | $s + \omega_n$ |
| 2 | $s^2 + 1{,}414\omega_n s + \omega_n^2$ |
| 3 | $s^3 + 1{,}75\omega_n s^2 + 2{,}15\omega_n^2 s + \omega_n^3$ |
| 4 | $s^4 + 2{,}1\omega_n s^3 + 3{,}4\omega_n^2 s^2 + 2{,}7\omega_n^3 s + \omega_n^4$ |
| 5 | $s^5 + 2{,}8\omega_n s^4 + 5\omega_n^2 s^3 + 5{,}5\omega_n^3 s^2 + 3{,}4\omega_n^4 s + \omega_n^5$ |
| 6 | $s^6 + 3{,}25\omega_n s^5 + 6{,}6\omega_n^2 s^4 + 8{,}6\omega_n^3 s^3 + 7{,}45\omega_n^4 s^2 + 3{,}95\omega_n^5 s + \omega_n^6$ |

**Ví dụ 5.5.**

- Hệ kín bậc hai sẽ có sai số xác lập vị trí $e(\infty)=0$ và ITAE cực tiểu nếu có hàm truyền:

$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 1,414\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Hệ kín bậc ba sẽ có sai số xác lập vị trí $e(\infty)=0$ và ITAE cực tiểu nếu có hàm truyền:

$$G_k(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3}$$

· Để đáp ứng quá độ của hệ kín bậc n là tối ưu theo tiêu chuẩn ITAE và hệ kín có sai số xác lập vận tốc bằng 0 thì hàm truyền hệ kín bậc n phải có dạng:

$$G_k(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Trong đó đa thức mẫu số của hàm truyền được lấy theo bảng sau :

| Bậc | Mẫu số hàm truyền |
|---|---|
| 2 | $s^2 + 3,2\omega_n s + \omega_n^2$ |
| 3 | $s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 3,25\omega_n^2 s + \omega_n^3$ |
| 4 | $s^4 + 2,41\omega_n s^3 + 4,93\omega_n^2 s^2 + 5,14\omega_n^3 s + \omega_n^4$ |
| 5 | $s^5 + 2,19\omega_n s^4 + 6,5\omega_n^2 s^3 + 6,3\omega_n^3 s^2 + 5,24\omega_n^4 s + \omega_n^5$ |
| 6 | $s^6 + 6,12\omega_n s^5 + 13,42\omega_n^2 s^4 + 17,16\omega_n^3 s^3 + 14,14\omega_n^4 s^2 + 6,76\omega_n^5 s + \omega_n^6$ |

**Ví dụ 5.6.**

- Hệ kín bậc hai sẽ có sai số xác lập vận tốc $e(\infty)=0$ và ITAE cực tiểu nếu có hàm truyền:

$$G_k(s) = \frac{3,2\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 3,2\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Hệ kín bậc ba sẽ có sai số xác lập vận tốc $e(\infty)=0$ và ITAE cực tiểu nếu có hàm truyền:

$$G_k(s) = \frac{3,25\omega_n^2 s + \omega_n^3}{s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 3,25\omega_n^2 s + \omega_n^3}$$

## 5.5 Giải phương trình trạng thái

### 1) Phương pháp giải tích

Xét hệ thống có mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & (5\text{-}18) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & (5\text{-}19) \end{cases}$$

Bài toán đặt ra là xác định đáp ứng y(t) của hệ thống khi biết tín hiệu vào u(t) và điều kiện đầu (trạng thái đầu) x(0). Để tìm y(t), trước tiên ta phải tính được nghiệm x(t) của phương trình trạng thái (5-18), sau đó thay x(t) vừa tìm được vào phương trình đầu ra (5-19).

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (5-18), ta được:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$\Rightarrow \quad (sI - A)\, X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s) \qquad (5\text{-}20)$$

Đặt $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$, thay vào biểu thức (5-20) ta được:

$$X(s) = \Phi(s)x(0) + \Phi(s)BU(s) \qquad (5\text{-}21)$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (5-21) ta được:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B\,u(\tau)d\tau \qquad (5\text{-}22)$$

trong đó: $\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)] = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$ (5-23)

- Nếu điều kiện đầu bằng 0 thì :

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)B\,u(\tau)d\tau \qquad (5\text{-}24)$$

- Nếu tín hiệu vào u(t)=0 thì : $x(t) = \Phi(t)x(0)$ (5-25)

Ma trận $\Phi(t)$ được gọi là ***ma trận quá độ*** hay ***ma trận chuyển trạng thái*** của hệ thống. Tính $\Phi(t)$ theo công thức (5-23) tương đối khó, vì phải tính ma trận nghịch đảo và biến đổi Laplace ngược. Để tiện lợi hơn, ta có thể tính $\Phi(t)$ theo cách nêu dưới đây.

Ta thấy khi u(t)=0 phương trình (5-18) có dạng thuần nhất:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad (5\text{-}26)$$

Nghiệm của (5-26) là: $x(t) = e^{At}x(0)$ (5-27)

So sánh (5-27) và (5-25) ta được:

$$\Phi(t) = e^{At} \qquad (5\text{-}28)$$

Theo định lý Cayley - Hamilton, ta có:

$$\Phi(t) = e^{At} = C_0 I + C_1 A + C_2 A^2 + ... + C_{n-1} A^{n-1} \qquad (5\text{-}29)$$

Thay A=λ với λ là giá trị riêng của ma trận A (tức là nghiệm của phương trình $\det(\lambda I - A) = 0$) vào biểu thức (5-29) ta sẽ tính được các hệ số $C_i$ (i=1,2,...,n-1).

***Tóm lại***, để tính đáp ứng của hệ thống theo phương pháp biến trạng thái ta thực hiện các bước :

1- Tính ma trận quá độ $\Phi(t)$ theo công thức (5-23) hoặc (5-29) .
2- Tính nghiệm x(t) theo công thức (5-22) hoặc (5-24).
3- Thay x(t) vào phương trình (5-19) để tính y(t).

**Ví dụ 5.7.** Cho hệ thống có hàm truyền: $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{2}{s^2+3s+2}$

1- Thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống trên.
2- Tìm đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào u(t)=1(t) theo phương pháp biến trạng thái, giả sử điều kiện đầu bằng 0.

***Giải.*** 1- Thành lập hệ phương trình trạng thái:

Từ hàm truyền ta được :

$$(s^2+3s+2)Y(s)=2U(s)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y}+3\dot{y}+2y=2u$$

Đặt các biến trạng thái : $x_1=y,\quad x_2=\dot{x}_1$

Ta được:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-2x_1-3x_2+2u\end{cases}$$

Suy ra phương trình trạng thái:

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}\qquad \text{Với}\quad A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix};\quad C=[1\quad 0]$$

2a) Tính ma trận quá độ $\Phi(t)$.

***Cách 1:*** Dùng ma trận nghịch đảo và biến đổi Laplace ngược.

$$\Phi(t)=L^{-1}[\Phi(s)]=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

Ta có: $$sI-A=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(s)=(sI-A)^{-1}$$

$$=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{(s+1)}-\dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)}-\dfrac{1}{(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)}+\dfrac{2}{(s+2)} & \dfrac{-1}{(s+1)}+\dfrac{2}{(s+2)}\end{bmatrix}$$

Lấy Laplace ngược từng thành phần của ma trận $\Phi(t)$ ta được :

$$\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)] = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

***Cách 2:*** Dùng ma trận hàm mũ.

Với hệ thống bậc hai, ta có:

$$\Phi(t) = e^{At} = C_0 I + C_1 A \qquad (5\text{-}30)$$

Các trị riêng của A là nghiệm của phương trình det( $\lambda$I-A)= 0

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Thay A= $\lambda_i$ vào biểu thức ma trận quá độ (5-30) ta được :

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = C_0 + C_1\lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} = C_0 + C_1\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-t} = C_0 - C_1 \\ e^{-2t} = C_0 - 2C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ C_1 = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

Thay $C_0$, $C_1$ và A vào (5-30) ta được:

$$\Phi(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

2b) Nghiệm của phương trình trạng thái với điều kiện đầu bằng 0 :

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)B.u(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} (2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}) & (e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}) \\ (-2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)}) & (-e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}[1]\, d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} 2(e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}) \\ 2(-e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)}) \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^t (2e^{-(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)})d\tau \\ \int_0^t (-2e^{-(t-\tau)} + 4e^{-2(t-\tau)})d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$y(t) = x_1(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

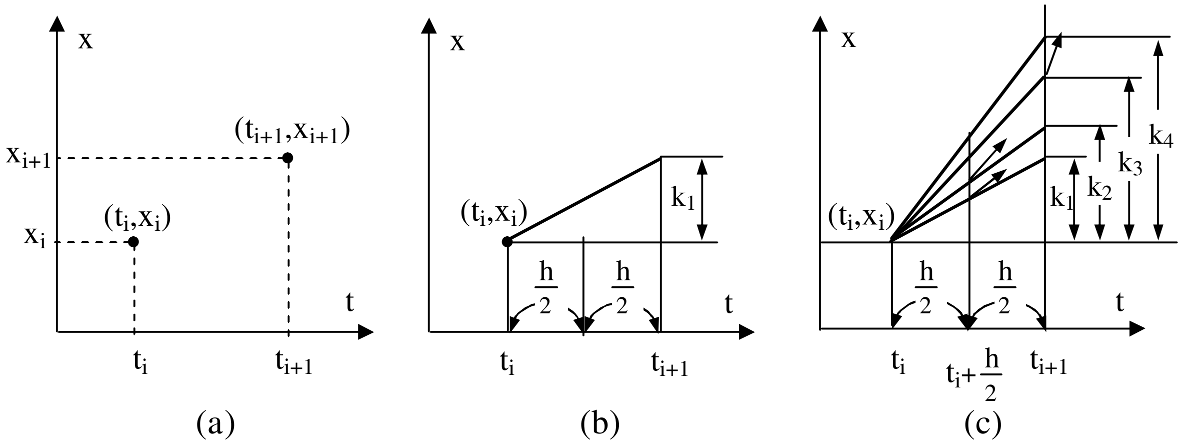
**2) Phương pháp số**

Để tìm nghiệm của phương trình trạng thái bằng máy tính, người ta thường sử dụng các phương pháp số như phương pháp Runge–Kutta, Runge–Kutta – Gill, phương pháp Euler và Euler cải tiến. Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu một điển hình là phương pháp Runge–Kutta để tính toán đáp ứng ứng với tín hiệu vào bậc thang.

Giả sử cần tìm nghiệm của phương trình vi phân vô hướng:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \qquad \text{với } x(0) = x_0 \tag{5-31}$$

Giả sử trong mặt phẳng t–x , điểm $(t_i, x_i)$ đã được biết và cần tìm điểm $(t_{i+1}, x_{i+1})$ như trên hình 5.9a). Khoảng thời gian gia tăng $(t_{i+1} - t_i) = h$ là khoảng thời gian tính toán và thường được gọi là chu kỳ lấy mẫu.




***Hình 5.9** Minh hoạ phương pháp Runge- Kutta*

Theo phương pháp Runge-Kutta, với giá trị $(t_i, x_i)$ đã biết, có thể xác định giá trị $x_{i+1}$ tại thời điểm $t = t_{i+1}$ theo trình tự các bước như sau:

**<u>Bước 1</u>** Tại điểm $(t_i, x_i)$ xác định độ dốc của đường cong. Độ dốc này bằng $f(t_i, x_i)$. Sử dụng độ dốc này để vẽ đường thẳng từ điểm $(t_i, x_i)$ và xác định $k_1$ (xem hình 5.9b) với $k_1$ là sự thay đổi giá trị của x tại $t = t_{i+1}$ nếu độ dốc này vẫn duy trì trong toàn bộ khoảng thời gian h. Tức là:

$$k_1 = h.f(t_i, x_i)$$

**<u>Bước 2</u>** Tại điểm $(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1)$, ở đó t tăng một khoảng $\frac{1}{2}h$ và x tăng $\frac{1}{2}k_1$, xác định độ dốc của đường cong. Độ dốc này bằng $f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1)$. Sử dụng độ dốc này để vẽ đường thẳng từ điểm $(t_i, x_i)$ và xác định $k_2$ (xem hình 5.9c) là sự thay đổi của x tại điểm $t = t_{i+1}$, tức là:

$$k_2 = h.f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1)$$

**Bước 3** Tương tự, tại điểm $(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_2)$ xác định độ dốc của đường cong. Độ dốc này là $f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_2)$. Sử dụng độ dốc này để vẽ đường thẳng từ điểm $(t_i, x_i)$ và xác định $k_3$ (xem hình 5.9c) là sự thay đổi của x tại điểm $t = t_{i+1}$, tức là:

$$k_3 = h.f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_2)$$

**Bước 4** Tương tự, tại điểm $(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_3)$ xác định độ dốc của đường cong. Độ dốc này là $f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_3)$. Sử dụng độ dốc này để vẽ đường thẳng từ điểm $(t_i, x_i)$ và xác định $k_4$ (xem hình 5.9c) là sự thay đổi của x tại điểm $t = t_{i+1}$, tức là:

$$k_4 = h.f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_3)$$

**Bước 5**

Xác định trung bình trọng số của $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ với trọng số tương ứng là 1, 2, 2 và 1. Ta có:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Như vậy, giá trị của $x_{i+1}$ có thể xác định theo biểu thức:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (5\text{-}32)$$

Phương trình (5-32) được gọi là phương trình Runge-Kutta bậc 4 vì nó liên quan đến 4 giá trị của k. Phương trình Runge-Kutta bậc 3 liên quan đến ba giá trị của k có thể xác định như sau:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \qquad (5\text{-}33)$$

Phương trình Runge-Kutta bậc 4 thường được dùng để tính nghiệm của phương trình vi phân. Để có nghiệm tính toán của phương trình vi phân (5-31) ta dịch giá trị của $x_{i+1}$ đến $x_i$.

## 5.6 Tính điều khiển được và quan sát được

### 1) Tính điều khiển được

Cho hệ thống tuyến tính mô tả bởi phương trình trạng thái cấp n:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad (5\text{-}34)$$

Hệ thống (5-34) được gọi là điều khiển được hoàn toàn nếu tồn tại ít nhất một tín hiệu điều khiển u(t) có khả năng chuyển hệ từ trạng thái ban đầu $x(t_0)$ đến trạng thái cuối x(T) bất kỳ trong khoảng thời gian hữu hạn $[t_0, T]$.

Khái niệm điều khiển được do Kalman định nghĩa năm 1960 và cùng với định nghĩa đó ông đã đưa ra tiêu chuẩn xét tính điều khiển được của hệ tuyến tính bất biến như sau:

Lập ma trận $\mathcal{C}$, gọi là *ma trận điều khiển được*:

$$\mathcal{C} = [\,B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots \;\; A^{n-1}B\,] \qquad (5\text{-}35)$$

Điều kiện cần và đủ để hệ tuyến tính (5-34) điều khiển được là:

$$\mathrm{rank}(\mathcal{C}) = n$$

Với hệ thống SISO thì $\mathcal{C}$ là ma trận vuông cấp *n*. Do đó điều kiện trên tương đương với:

$$\det(\mathcal{C}) \neq 0$$

**Ví dụ 5.8.** Cho hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$; $C = [1 \quad 0]$

Với hệ bậc hai ta có ma trận điều khiển được :

$$\mathcal{C} = [\,B \;\; AB\,]$$

$$= \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \;\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Vì $\det(\mathcal{C}) = -4 \neq 0$

nên $\mathrm{rank}(\mathcal{C}) = 2$

Do đó hệ thống trên điều khiển được hoàn toàn.

**2) Tính quan sát được**

Quan sát một tín hiệu trong hệ thống được hiểu là xác định giá trị tín hiệu nhờ đo trực tiếp tín hiệu đó (nhờ các thiết bị cảm biến) hoặc thông qua các tín hiệu đo được khác. Ví dụ vận tốc có thể quan sát được (xác định được) nhờ đo trực tiếp bằng bộ phát tốc hoặc gián tiếp từ việc đo lượng dịch chuyển trong một khoảng thời gian, gia tốc xác định được từ việc đo vận tốc, công suất chẩn đoán được nhờ việc đo dòng điện và điện áp.

Hệ thống (5-34) được gọi là quan sát được hoàn toàn tại thời điểm $t_0$ nếu với mọi $T > t_0$, ta luôn có thể xác định được trạng thái đầu $x(t_0)$ từ các tín hiệu vào ra u(t), y(t) trong khoảng thời gian $[t_0, T]$.

Để kiểm tra tính quan sát được của hệ thống (5-34) ta thành lập ma trận $\mathcal{O}$, gọi là ma trận quan sát được:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}36)$$

Điều kiện cần và đủ để hệ thống quan sát được là:

$$\mathrm{rank}(\mathcal{O}) = n$$

Với hệ thống SISO thì ma trận $\mathcal{O}$ là ma trận vuông cấp n. Do đó điều kiện trên trở thành :

$$\det(\mathcal{O}) \neq 0$$

**Ví dụ 5.9.** Cho hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$; $C = [1 \quad 0]$

Với hệ bậc hai đã cho ta có ma trận quan sát được :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \quad 0] \\ [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vì $\det(\mathcal{O}) = 1 \neq 0$

nên $\mathrm{rank}(\mathcal{O}) = 2$

Do đó hệ thống quan sát được hoàn toàn.

**Chương 6**

# THIẾT KẾ VÀ HIỆU CHỈNH HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN

Thiết kế hệ thống điều khiển bao gồm việc lựa chọn bộ điều chỉnh thích hợp cho đối tượng điều khiển và xác định các thông số của bộ điều chỉnh để hệ thống làm việc ổn định, đạt được mục tiêu điều khiển. Hệ thống điều khiển thường đòi hỏi các yêu cầu chất lượng cơ bản sau đây:

- Hệ thống phải làm việc ổn định dưới tác động của tín hiệu vào (tín hiệu đặt) và tác động của nhiễu.
- Sai lệch tĩnh của hệ bằng 0 hoặc tín hiệu ra bám theo được tín hiệu vào trên một dải tần số càng rộng càng tốt .
- Đáp ứng nhanh với sự thay đổi của trị số đặt chỉnh. Đạt các chỉ tiêu về thời gian quá độ, độ vọt lố cho phép, độ dự trữ biên, dự trữ pha...
- Hệ thống nhanh chóng khử được ảnh hưởng của nhiễu.

## 6.1. Chọn bộ điều chỉnh

Theo kinh nghiệm thực tế, người ta thường chọn như sau:

**- Bộ điều chỉnh P**

Bộ điều chỉnh P thích hợp cho các đối tượng điều khiển ổn định bậc 1 ($PT_1$), bậc 2 ($PT_2$) hoặc bậc n và các đối tượng điều khiển không ổn định.

**- Bộ điều chỉnh I**

Bộ điều chỉnh I thích hợp cho các đối tượng điều khiển ổn định bậc 0 (khâu P) , bậc 1($PT_1$) và đối tượng điều khiển có khâu dịch trễ.

**- Bộ điều chỉnh PI và PID**

Bộ điều chỉnh PI và PID thích hợp cho các đối tượng điều khiển ổn định bậc 2 ($PT_2$) và bậc n.

## 6.2. Xác định thông số của bộ điều chỉnh

Có nhiều phương pháp để xác định thông số tối ưu của bộ điều chỉnh PID nhưng tiện ích hơn cả trong ứng dụng thực tế vẫn là các phương pháp thực nghiệm :

§ Phương pháp Ziegler-Nichols ,

§ Phương pháp Chien, Hrones và Reswick

### 6.2.1 Phương pháp Ziegler - Nichols :

Ziegler và Nichols đưa ra phương pháp xác định thông số tối ưu của bộ PID hoặc từ đáp ứng quá độ của đối tượng hoặc từ đáp ứng quá độ của hệ thống kín.

**1) Dùng đáp ứng quá độ của đối tượng**

Phương pháp này còn có tên là phương pháp thứ nhất của Ziegler - Nichols. Nó có nhiệm vụ xác định các thông số $K_P$, $T_N$, $T_V$ cho các bộ điều chỉnh P, PI và PID trên cơ sở đối tượng có thể mô tả xấp xỉ bởi khâu bậc nhất có trễ:

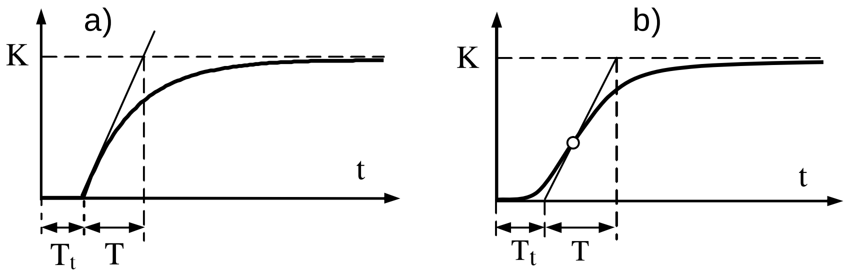
$$G(s) = \frac{Ke^{-T_t s}}{Ts+1}$$

sao cho hệ thống nhanh chóng về trạng thái xác lập và độ vọt lố $\sigma_{max}$ không vượt quá một giới hạn cho phép, khoảng 40% so với $h(\infty)=\lim_{t\to\infty} h(t)$:

$$\sigma_{max} = \left|\frac{h_{max} - h(\infty)}{h(\infty)}\right| \le 40\%$$

Ba tham số $T_t$ (thời gian trễ), K (hệ số khuếch đại) và T (hằng số thời gian quán tính) của mô hình xấp xỉ có thể xác định gần đúng từ đồ thị hàm quá độ h(t) của đối tượng. Nếu đối tượng có dạng như hình (6.1a) mô tả thì từ đồ thị hàm h(t) đó ta đọc ra được:

- $T_t$ là khoảng thời gian tín hiệu ra h(t) chưa có phản ứng ngay với tín hiệu kích thích 1(t) tại đầu vào.
- K là giá trị giới hạn $h(\infty)=\lim_{t\to\infty} h(t)$.
- Gọi A là điểm kết thúc khoảng thời gian trễ, tức là điểm trên trục hoành có hoành độ bằng $T_t$. Khi đó T là khoảng cần thiết sau $T_t$ để tiếp tuyến của h(t) tại A đạt được giá trị K.




***Hình 6.1*** *Xác định tham số cho mô hình xấp xỉ bậc nhất có trễ*

Trường hợp hàm quá độ h(t) không có dạng lý tưởng như ở hình (8.1a), nhưng có dạng gần giống hình chữ *S* của khâu quán tính bậc 2 hoặc bậc n như mô tả ở hình (6.1b) thì ba tham số K, $T_t$, T được xác định xấp xỉ như sau :

- K là giá trị giới hạn $h(\infty)$.
- Kẻ đường tiếp tuyến của h(t) tại điểm uốn của nó. Khi đó $T_t$ sẽ là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành và T là khoảng thời gian cần thiết để đường tiếp tuyến đi được từ giá trị 0 tới được giá trị K.

Như vậy ta thấy *điều kiện để áp dụng được phương pháp xấp xỉ mô hình bậc nhất có trễ của đối tượng là đối tượng phải ổn định, không có dao động và ít nhất hàm quá độ của nó phải có dạng chữ S*. Sau khi đã có các tham số cho mô hình xấp xỉ của đối tượng, ta chọn các thông số của bộ điều chỉnh theo bảng 6.1 như sau :

| Bộ điều chỉnh | $K_P$ | $T_N$ | $T_V$ |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{T}{K.T_t}$ | – | – |
| PI | $0,9\frac{T}{KT_t}$ | $\frac{10}{3}T_t$ | – |
| PID | $1,2\frac{T}{KT_t}$ | $2T_t$ | $0,5T_t$ |

***Bảng 6.1***

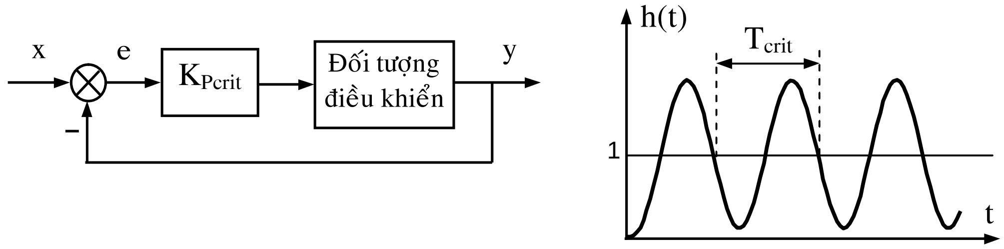
Từ bảng (6.1), ta xác định được các thông số khác của bộ điều chỉnh như sau :

- Hệ số tích phân : $K_I = \dfrac{K_P}{T_N}$
- Hệ số vi phân : $K_D = K_P \,.\, T_V$

**2) Dùng đáp ứng quá độ của hệ kín**

Phương pháp này còn có tên là phương pháp thứ hai của Ziegler – Nichols, được áp dụng cho các đối tượng có khâu tích phân lý tưởng như mức chất lỏng trong bồn chứa, vị trí hệ truyền động dùng động cơ,.... Phương pháp này sử dụng các giá trị tới hạn thu được từ thực nghiệm đáp ứng quá độ của hệ kín.

Trước tiên, sử dụng bộ P lắp vào hệ kín (hoặc dùng bộ PID và chỉnh các thành phần $K_I$ và $K_D$ về giá trị 0). Khởi động quá trình với hệ số khuếch đại $K_P$ thấp, sau đó tăng dần $K_P$ tới giá trị tới hạn $K_{Pcrit}$ để hệ kín ở chế độ giới hạn ổn định, tức là tín hiệu ra h(t) có dạng dao động điều hòa. Xác định chu kỳ tới hạn $T_{crit}$ của dao động.




***Hình 6.2*** *Xác định hệ số khuếch đại tới hạn*

- Xác định thông số của bộ điều chỉnh theo bảng 6.2 như sau :

| Bộ điều chỉnh | $K_P$ | $T_N$ | $T_V$ |
|---|---|---|---|
| P | $0{,}5\ K_{Pcrit}$ | - | - |
| PI | $0{,}45\ K_{Pcrit}$ | $0{,}83\ T_{crit}$ | - |
| PID | $0{,}6\ K_{Pcrit}$ | $0{,}5\ T_{crit}$ | $0{,}125\ T_{crit}$ |

***Bảng 6.2***

**6.2.2 Phương pháp Chien, Hrones và Reswick**

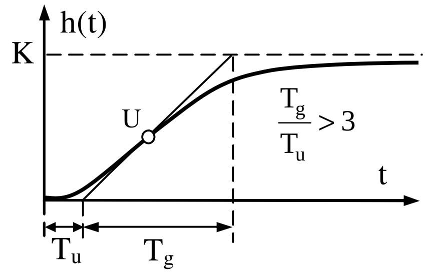
Về mặt nguyên lý, phương pháp Chien, Hrones và Reswick gần giống với phương pháp thứ nhất của Ziegler – Nichols, nhưng nó không sử dụng mô hình tham số gần đúng dạng quán tính bậc nhất có trễ mà sử dụng trực tiếp dạng hàm quá độ của đối tượng điều khiển.

Phương pháp Chien, Hrones và Reswick cũng giả thiết rằng đối tượng là ổn định, hàm quá độ không dao động và có dạng hình chữ $S$. Tuy nhiên phương pháp này thích hợp với các đối tượng bậc rất cao như quán tính bậc n :

$$G(s) = \frac{K}{\left(Ts+1\right)^n}$$

cụ thể là những đối tượng với hàm quá độ h(t) thỏa mãn : $T_g / T_u > 3$

trong đó $T_u$ là hoành độ giao điểm tiếp tuyến của h(t) tại điểm uốn U với trục hoành và $T_g$ là khoảng thời gian cần thiết để tiếp tuyến đó đi được từ 0 đến giá trị $K = \lim_{t\to\infty} h(t)$.




***Hình 6.3** Hàm quá độ đối tượng thích hợp cho phương pháp Chien, Hrones và Reswick*

Từ dạng hàm quá độ h(t) của đối tượng với hai tham số $T_u$ và $T_g$ thỏa mãn, Chien, Hrones và Reswick đã đưa ra bốn cách xác định thông số bộ điều chỉnh cho bốn yêu cầu chất hượng khác nhau như sau:

1) Yêu cầu tối ưu theo nhiễu (giảm ảnh hưởng nhiễu) và hệ kín không có độ vọt lố.
2) Yêu cầu tối ưu theo nhiễu (giảm ảnh hưởng nhiễu) và hệ kín có độ vọt lố $\leq 20\%$.
3) Yêu cầu tối ưu theo tín hiệu đặt (giảm sai lệch bám) và hệ kín không có độ vọt lố.
4) Yêu cầu tối ưu theo tín hiệu đặt (giảm sai lệch bám) và hệ kín có độ vọt lố$\leq 20\%$.

| Bộ điều chỉnh | Thông số | Đáp ứng hệ kín dạng chữ *S*, không có độ vọt lố | | Đáp ứng hệ kín dạng dao động tắt dần, độ vọt lố ≤ 20% | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Tối ưu theo nhiễu z | Tối ưu theo tín hiệu đặt x | Tối ưu theo nhiễu z | Tối ưu theo tín hiệu đặt x |
| P | $K_P$ | $0{,}3\frac{T_u}{T_gK}$ | $0{,}3\frac{T_u}{T_gK}$ | $0{,}7\frac{T_u}{T_gK}$ | $0{,}7\frac{T_u}{T_gK}$ |
| PI | $K_P$ | $0{,}6\frac{T_u}{T_gK}$ | $0{,}35\frac{T_u}{T_gK}$ | $0{,}7\frac{T_u}{T_gK}$ | $0{,}6\frac{T_u}{T_gK}$ |
| | $T_N$ | $4\ T_u$ | $1{,}2\ T_g$ | $2{,}3\ T_u$ | $T_g$ |
| PID | $K_P$ | $0{,}95\frac{T_u}{T_gK}$ | $0{,}6\frac{T_u}{T_gK}$ | $1{,}2\frac{T_u}{T_gK}$ | $0{,}95\frac{T_u}{T_gK}$ |
| | $T_N$ | $2{,}4\ T_u$ | $T_g$ | $2\ T_u$ | $1{,}35\ T_g$ |
| | $T_V$ | $0{,}42\ T_u$ | $0{,}5\ T_g$ | $0{,}42\ T_u$ | $0{,}47\ T_g$ |

***Bảng 6.3** Thông số bộ điều chỉnh theo phương pháp Chien, Hrones và Reswick*

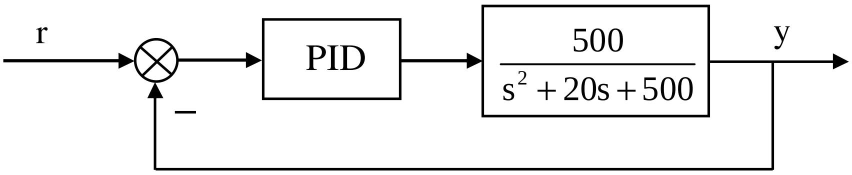
Từ bảng 6.3, ta xác định các hệ số khác của bộ điều chỉnh như sau :

- Hệ số tích phân : $K_I = \dfrac{K_P}{T_N}$
- Hệ số vi phân : $K_D = K_P \,.\, T_V$

### 6.2.3. Phương pháp giải tích

Một phương pháp khác cũng thường dùng trong thiết kế bộ PID là phương pháp giải tích.

***Ví dụ.*** Cho hệ thống điều khiển như hình vẽ:




Hãy xác định thông số của bộ điều chỉnh PID sao cho hệ thống thoả mãn yêu cầu : Hệ có cặp cực phức với $\xi = 0,6$ và $\omega_n = 10$. Hệ số vận tốc $K_V = 100$.

***Giải.*** Hàm truyền của bộ PID cần thiết kế:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Hệ số vận tốc của hệ sau khi hiệu chỉnh:

$$K_V = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} s\left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right)\left(\frac{500}{s^2+20s+500}\right)$$

$$\Rightarrow K_V = K_I$$

Theo yêu cầu đề ra $K_V = 100$ nên suy ra: $K_I = 100$

Phương trình đặc tính của hệ sau khi hiệu chỉnh là:

$$1 + G_c(s)G(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right)\left(\frac{500}{s^2+20s+500}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s(s^2+20s+500) + 500(K_D s^2 + K_P s + K_I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s^3 + (20+500K_D)s^2 + (500+500K_P)s + 500K_I = 0 \qquad (*)$$

Để hệ có $\xi = 0,6$ và $\omega_n = 10$ thì phương trình đặc tính (*) phải có dạng:

$$(s+a)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (s+a)(s^2+12s+100) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s^3 + (a+12)s^2 + (12a+100)s + 100a = 0 \qquad (**)$$

Đồng nhất các hệ số của các phương trình (*) và (**) ta được:

$$\begin{cases} 20 + 500K_D = a + 12 \\ 500 + 500K_P = 12a + 100 \\ 500K_I = 100a \end{cases}$$

Với $K_I = 100$, giải hệ phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} a = 500 \\ K_P = 11,2 \\ K_D = 0,98 \end{cases}$$

Do đó hàm truyền của bộ PID cần thiết kế là:

$$G_c(s) = 11,2 + \frac{100}{s} + 0,98s$$

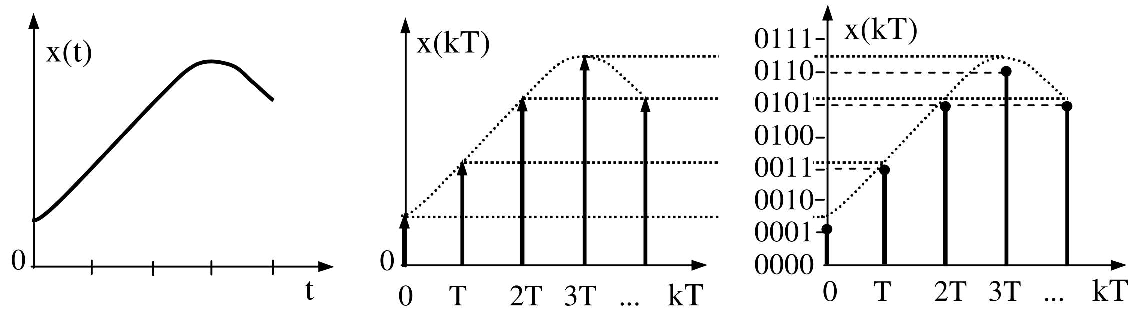
# Chương 7

# HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC

## 7.1 Giới thiệu chung

### 7.1.1 Tín hiệu và hệ thống rời rạc

Lượng tử hoá là quá trình biến đổi tín hiệu liên tục thành tín hiệu rời rạc. Tùy thuộc vào phương pháp lượng tử hoá tín hiệu mà ta có các hệ thống xử lý tín hiệu khác nhau. Phương pháp lượng tử hoá theo thời gian cho tín hiệu rời rạc có dạng dãy xung với biên độ liên tục, thời gian rời rạc. Hệ thống xử lý loại tín hiệu này gọi là hệ rời rạc. Nếu phép lượng tử hoá được tiến hành theo thời gian và cả theo biên độ thì kết quả nhận được là tín hiệu số. Hệ thống xử lý tín hiệu số gọi là hệ số. Trong hệ thống rời rạc và hệ thống số, biên độ tín hiệu chỉ tồn tại ở các thời điểm rời rạc cách đều nhau đúng bằng một chu kỳ lấy mẫu tín hiệu. Về mặt toán học, tín hiệu rời rạc và tín hiệu số được biểu diễn bằng dãy giá trị biên độ {x(0), x(T), x(2T),...} và ký hiệu đơn giản là x(kT) hay x(k), trong đó k là số nguyên, T là chu kỳ lấy mẫu.




Tín hiệu liên tục
(liên tục thời gian, biên độ)

Tín hiệu rời rạc
(rời rạc thời gian)

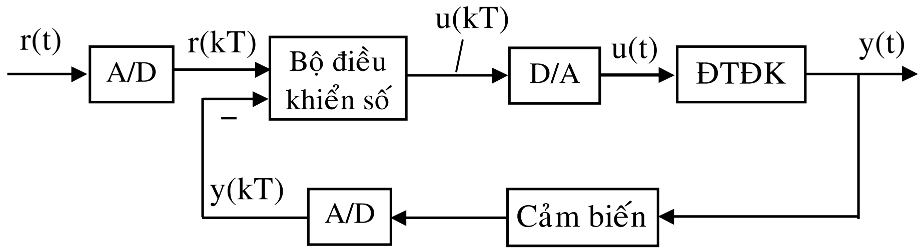
Tín hiệu số
(rời rạc thời gian, biên độ)

***Hình 7.1*** *Lượng tử hoá và mã hoá tín hiệu*

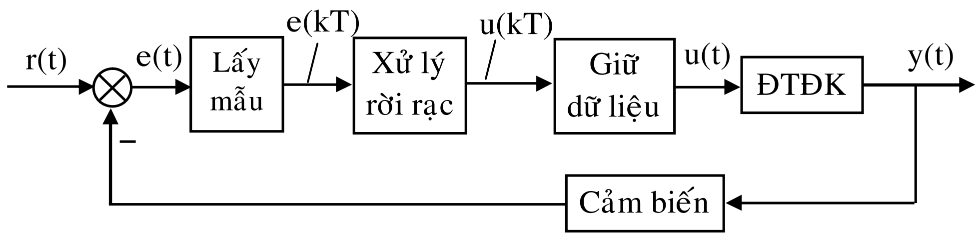
Do sự phát triển mạnh mẽ của các bộ vi xử lý và máy tính số với giá thành ngày càng hạ, tốc độ xử lý và độ tin cậy ngày càng cao nên các hệ điều khiển số ngày càng được sử dụng rộng rãi trong điều khiển tự động. So với hệ điều khiển liên tục thì hệ điều khiển số có nhiều ưu điểm hơn như uyển chuyển, linh hoạt, dễ dàng thay đổi thuật toán điều khiển, dễ dàng áp dụng các thuật toán điều khiển phức tạp bằng cách lập trình. Hơn nữa, các máy tính số còn có khả năng điều khiển nhiều đối tượng cùng một lúc.

Hình 7.2 trình bày sơ đồ khối đơn giản hoá của một hệ thống điều khiển số. Trong hệ thống có hai loại tín hiệu: tín hiệu liên tục r(t), e(t), u(t), y(t) và tín hiệu số r(kT), y(kT), u(kT). Trung tâm của hệ thống là bộ điều khiển số (máy tính hoặc bộ vi xử lý) có chức năng xử lý thông tin phản hồi từ cảm biến và xuất ra tín hiệu điều khiển đối tượng. Vì cảm biến và đối tượng là các thành phần liên tục nên cần sử dụng bộ chuyển đổi A/D và D/A để giao tiếp với máy tính.

Để phân tích và thiết kế hệ thống điều khiển số trước tiên ta phải mô tả toán học được quá trình chuyển đổi A/D và D/A. Tuy nhiên, hiện nay không có phương pháp nào cho phép mô tả chính xác quá trình chuyển đổi phi tuyến A/D và D/A do có sai số lượng tử hoá biên độ. Vì vậy thay vì khảo sát hệ thống số ở hình 7.2 ta khảo sát hệ thống rời rạc tương ứng ở hình 7.3. Nếu bỏ qua sai số lượng tử biên độ thì có thể xem tín hiệu số là tín hiệu rời rạc và ta có thể dùng lý thuyết điều khiển rời rạc trình bày trong chương này để mô tả, phân tích và thiết kế hệ thống số.



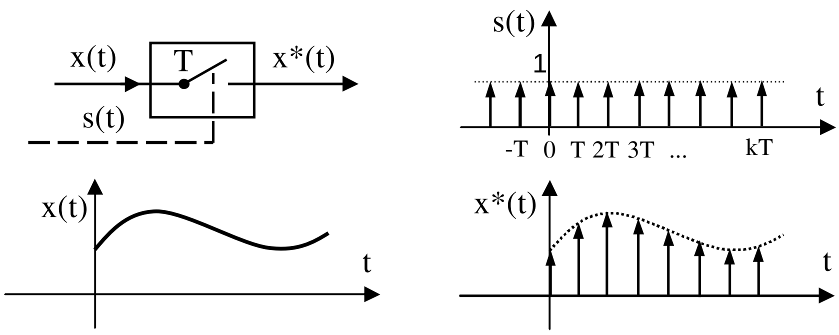

***Hình 7.2*** *Sơ đồ khối hệ thống điều khiển số*




***Hình 7.3*** *Sơ đồ khối hệ thống điều khiển rời rạc*

### 7.1.2 Khâu lấy mẫu

Khâu lấy mẫu có tác dụng biến đổi tín hiệu liên tục thành tín hiệu rời rạc theo thời gian. Khâu lấy mẫu lý tưởng hoạt động như một khoá điện tử với thời gian đóng ngắt rất nhỏ so với chu kỳ lấy mẫu.




***Hình 7.4*** *Quá trình lấy mẫu tín hiệu*

Xét bộ lấy mẫu có đầu vào là tín hiệu liên tục x(t) và đầu ra là tín hiệu rời rạc x*(t). Quá trình lấy mẫu có thể mô tả bằng biểu thức toán học sau:

$$x^*(t) = x(t).\, s(t) \qquad (7\text{-}1)$$

trong đó s(t) là hàm lấy mẫu, có dạng chuỗi xung đơn vị :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \qquad (7\text{-}2)$$

$\delta(t - kT)$ là xung đơn vị phát tại thời điểm kT

Giả sử x(t)=0 khi t <0, biểu thức lấy mẫu trở thành :

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t).\delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT).\delta(t - kT) \qquad (7\text{-}3)$$

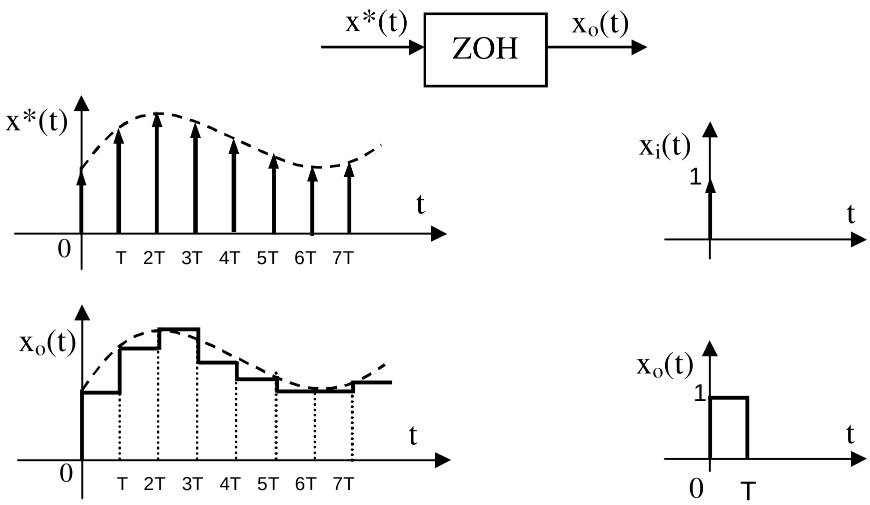
Biến đổi Laplace cả hai vế phương trình trên ta được :

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \qquad (7\text{-}4)$$

*Trong các hệ thống điều khiển số thực tế, nếu bỏ qua sai số lượng tử hoá thì các bộ chuyển đổi ADC chính là các khâu lấy mẫu.*

### 7.1.3 Khâu giữ dữ liệu

Khâu giữ dữ liệu là khâu chuyển tín hiệu rời rạc theo thời gian thành tín hiệu liên tục theo thời gian. Khâu giữ dữ liệu có nhiều dạng khác nhau, đơn giản nhất và sử dụng nhiều nhất là khâu giữ bậc 0 (Zero Order Hold - ZOH).




***Hình 7.5*** *Khâu giữ bậc 0 (ZOH)*

Nếu tín hiệu vào $x_i(t)$ của khâu ZOH là xung đơn vị thì tín hiệu ra $x_o(t)$ là xung vuông có biên độ là 1, độ rộng là T, tức là: $x_o(t) = 1(t) - 1(t-T)$

$X_i(s) = L[\delta(t)] = 1$

$$X_o(s) = L[1(t) - 1(t-T)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Hàm truyền của khâu ZOH :

$$G_{ZOH}(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \qquad (7\text{-}5)$$

*Trong các hệ thống điều khiển số thực tế, nếu bỏ qua sai số lượng tử hoá thì các bộ chuyển đổi DAC chính là các khâu giữ bậc 0 ( ZOH).*

## 7.2. Phép biến đổi Z

Bằng cách sử dụng phép biến đổi Laplace ta có thể mô tả quá trình lấy mẫu và giữ dữ liệu. Tuy nhiên các biểu thức mô tả lại chứa hàm $e^x$ nên nếu ta sử dụng để mô tả hệ thống rời rạc thì khi phân tích, thiết kế hệ thống sẽ gặp nhiều khó khăn. Để giải quyết vấn đề này, người ta dùng phép biến đổi Z.

### 7.2.1 Định nghĩa

- Cho tín hiệu rời rạc x(k). Biến đổi Z của x(k) là :

$$X(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{7-6}$$

trong đó: $z = e^{Ts}$

Nếu x(k)=0 khi k<0 thì biểu thức định nghĩa trở thành :

$$X(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

Miền hội tụ của X(z) là tập hợp tất cả các giá trị z sao cho X(z) hữu hạn.

Nếu so sánh với biểu thức lấy mẫu của tín hiệu liên tục x(t):

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

Ta thấy:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = X^*(s)\Big|_{z=e^{Ts}} \tag{7-7}$$

- Quá trình ngược lại để tìm hàm rời rạc x(k) từ hàm phức X(z) được gọi là phép biến đổi Z ngược, ký hiệu là $Z^{-1}$.

Cho hàm phức X(z). Biến đổi Z ngược của X(z) là:

$$x(k) = Z^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j}\int_C X(z).z^{k-1}dz \tag{7-8}$$

Với C là đường cong kín bất kỳ thuộc miền hội tụ của X(z) và bao gốc toạ độ.

### 7.2.2 Các tính chất cơ bản

1) Tính tuyến tính

nếu $X_1(z) = Z[x_1(k)]$ và $X_2(z) = Z[x_2(k)]$

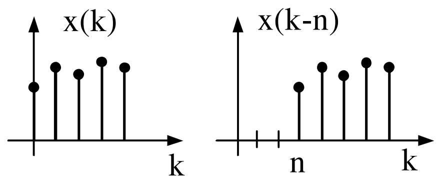
thì $Z[a_1x_1(k) + a_2x_2(k)] = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$

2) Định lý hàm chuyển dịch

nếu $X(z) = Z[x(k)]$

thì $Z[x(k-n)] = z^{-n}X(z)$

$Z[x(k+n)] = z^{n}X(z)$




3) Định lý tỉ lệ (thay đổi thang tỉ lệ khi nhân dãy x(k) với hàm mũ $a^k$)

nếu $X(z) = Z[x(k)]$ thì $Z[a^k.x(k)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$

4) Đạo hàm trong miền Z

nếu $X(z) = Z[x(k)]$ thì $Z[k.x(k)] = -z\frac{dX(z)}{dz}$

5) Định lý giá trị đầu

nếu $X(z) = Z[x(k)]$ thì $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

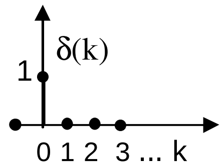
6) Định lý giá trị cuối

nếu $X(z) = Z[x(k)]$ thì $x(\infty) = \lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$

### 7.2.3 Biến đổi Z của các hàm cơ bản

**1) Hàm xung Dirac**

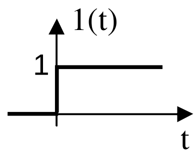
$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k=0 \\ 0 & \text{nếu } k\neq 0 \end{cases}$$




$$Z[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = \delta(0)z^{-0} = 1$$

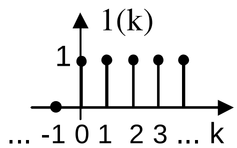
**2) Hàm bậc thang đơn vị**

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$




Rời rạc hoá với chu kỳ T ta được:

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$




Theo định nghĩa:

$$Z[1(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1(k)z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + ... + z^{-\infty}$$

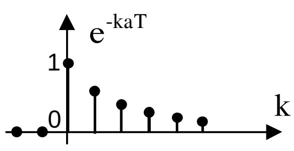
Nếu $\left|z^{-1}\right| < 1$ (hay $|z| > 1$) thì biểu thức trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn. $\Rightarrow$ $Z[1(k)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ $\quad (|z| > 1)$

Từ kết quả trên và áp dụng định lý tỉ lệ ta suy ra:

$$Z[a^k] = Z[a^k.1(k)] = \frac{z/a}{(z/a) - 1} = \frac{z}{z-a}$$

**3) Hàm mũ**

$$x(k) = e^{-kaT}.1(k) = \begin{cases} e^{-kaT} & \text{nếu } k \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$

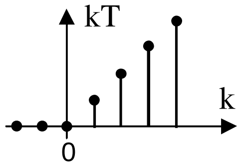



$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + ...$$

$$=1+(e^{aT}z)^{-1}+(e^{aT}z)^{-2}+...=\frac{1}{1-(e^{aT}z)^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}} \qquad (\left|e^{aT}z\right|>1)$$

**4) Hàm dốc**

$$x(k)=kT.1(k)=\begin{cases}kT & \text{nếu } k\geq 0\\ 0 & \text{nếu } k>0\end{cases}$$




$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}kT.z^{-k}=0+Tz^{-1}+2Tz^{-2}+3Tz^{-3}+...$$

$$=Tz^{-1}(1+2z^{-1}+3z^{-2}+...)=\frac{Tz^{-1}}{1-(z^{-1})^2}=\frac{Tz}{(z-1)^2} \qquad (\left|z\right|>1)$$

Bảng tóm tắt các ảnh Laplace và Z cơ bản :

| TT | x(t) | x(k)= x(kT) | X(s) | X(z) |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $1(t)$ | $1(k)$ | $\frac{1}{s}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| 2. | $\delta(t)$ | $\delta(k)=\{1,0,0,...\}$ | $1$ | $1$ |
| 3. | $e^{-at}$ | $e^{-akT}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ |
| 4. | $a^{\frac{t}{T}}$ | $a^{k}$ | $\frac{T}{Ts-\ln a}$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| 5. | $t$ | $kT$ | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| 6. | $te^{-at}$ | $kTe^{-akT}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $\frac{e^{-aT}Tz}{(z-e^{-aT})^2}$ |
| 7. | $1-e^{-at}$ | $1-e^{-akT}$ | $\frac{a}{s(s+a)}$ | $\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ |
| 8. | $e^{-at}\cos\omega t$ | $e^{-akT}\cos(\omega kT)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $\frac{z(z-e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$ |
| 9. | $e^{-at}\sin\omega t$ | $e^{-akT}\sin(\omega kT)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $\frac{z-e^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$ |
| 10 | $\frac{1}{ab}+\frac{e^{-at}}{a(a-b)}+\frac{be^{-at}}{b(b-a)}$ | | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ | $\frac{z(Az+B)}{(z-1)(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$ <br> $A=\frac{b(1-e^{-aT})-a(1-e^{-bT})}{ab(b-a)}$ <br> $B=\frac{ae^{-aT}(1-e^{-bT})-be^{-bT}(1-e^{-aT})}{ab(b-a)}$ |

### 7.2.4 Tìm X(z) từ ảnh Laplace X(s)

Từ ảnh Laplcae X(s) của tín hiệu liên tục x(t) ta có thể thành lập ảnh X(z) của tín hiệu rời rạc x(k) theo các bước như sau:

Bước1: Phân tích X(s) thành tổng các thành phần đơn giản $X_1(s)$, $X_2(s)$,...

Bước2: Tra bảng biến đổi Z để được $X_1(z)$, $X_2(z)$,... ứng với $X_1(s)$, $X_2(s)$,...

**Ví dụ 7.1.** Hãy tìm X(z) khi biết :

$$\textbf{\textit{a)}}\ X(s)=\frac{a}{s(s+a)}\quad ;\quad \textbf{\textit{b)}}\ X(s)=\frac{K}{s^2(s+a)}\quad ;\ \textbf{\textit{c)}}\ X(s)=\frac{1}{(s+a)(s+b)}$$

***Giải.***

$$\textbf{\textit{a)}}\ X(z)=Z\left[\frac{a}{s(s+a)}\right]=Z\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right]=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}=\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

***Nhận xét:*** Từ kết quả trên ta suy ra:

$$Z\left[\frac{K}{s(s+a)}\right]=\left(\frac{K}{a}\right)Z\left[\frac{a}{s(s+a)}\right]=\left(\frac{K}{a}\right)\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$\textbf{\textit{b)}}\ X(z)=Z\left[\frac{K}{s^2(s+a)}\right]=\frac{K}{a^2}Z\left[\frac{1}{(s+a)}+\frac{a}{s^2}-\frac{1}{s}\right]$$

$$=\frac{K}{a^2}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}+\frac{aTz}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}\right)$$

$$=\frac{K}{a^2}\left(\frac{(aT+e^{-aT}-1)z^2+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}\right)$$

$$\textbf{\textit{c)}}\ X(z)=Z\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right]=Z\left[\frac{1}{(b-a)}\frac{1}{(s+a)}+\frac{1}{(a-b)}\frac{1}{(s+b)}\right]$$

$$=Z\left[\frac{1}{(b-a)}\frac{1}{(s+a)}\right]+Z\left[\frac{1}{(a-b)}\frac{1}{(s+b)}\right]$$

$$=\frac{1}{(b-a)}\frac{z}{(z-e^{-aT})}+\frac{1}{(a-b)}\frac{z}{(z-e^{-bT})}=\frac{z(e^{-bT}-e^{-aT})}{(b-a)(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$$

### 7.2.5 Tìm biến đổi Z ngược

Tìm biến đổi Z ngược của hàm X(z) chính là đi tìm chuỗi giá trị gốc hay hàm rời rạc gốc x(k). Dùng công thức định nghĩa để tìm biến đổi Z ngược rất phức tạp nên ta thường dùng các cách sau đây :

**Cách 1**: *Phân tích X(z) thành tổng các phân thức đơn giản và tra bảng biến đổi Z.*

**Ví dụ 7.2.** Cho $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ . Tìm x(k).

***Giải.*** Phân tích X(z) thành tổng:

$$X(z) = (z)\left(\frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}\right) = \frac{-z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

Tra bảng biến đổi Z ta được:

$$x(k) = Z^{-1}[X(z)] = -1^k + 2^k = -1 + 2^k$$

**<u>Cách 2</u>**: *Khai triển X(z) thành chuỗi luỹ thừa theo* $z^{-1}$

Theo công thức định nghĩa phép biến đổi Z :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots$$

Ta thấy dãy giá trị x(k) chính là các hệ số của chuỗi.

**Ví dụ 7.3.** Cho $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ . Tìm x(k).

***Giải.*** $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$

Thực hiện phép chia đa thức ta được :

$$\begin{array}{l|l}
z & z^2 - 3z + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{z - 3 + 2z^{-1}} & z^{-1} \\
+3 - 2z^{-1} & +3z^{-2} \\
\underline{+3 - 9z^{-1} + 6z^{-2}} & \\
+7z^{-1} - 6z^{-2} & +7z^{-3} \\
\underline{+7z^{-1} - 21z^{-2} + 14z^{-3}} & \\
+15z^{-2} - 14z^{-3} & +15z^{-4} \\
+15z^{-2} - 45z^{-3} + 30z^{-4} & \ldots
\end{array}$$

Kết quả: $X(z) = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \ldots$

Suy ra chuỗi giá trị x(k):

x(0)=0 ; x(1)=1 ; x(2)=3 ; x(3)=7 ; x(4)=15 ; ...

**<u>Cách 3</u>**: *Phương pháp Residue (tính thặng dư)*

Nếu X(z) có n cực $z_1, z_2, \ldots z_n$ ta sẽ có chuỗi giá trị gốc x(k) như sau:

$$x(k) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_i}[X(z)z^{k-1}]$$

Nếu $z_i$ là cực bậc một (riêng rẽ, không lặp) thì:

$$\operatorname*{Res}_{z_i}[X(z)z^{k-1}] = \lim_{z \to z_i}[X(z)z^{k-1}(z - z_i)]$$

Nếu $z_i$ là cực bậc m (lặp m lần) thì:

$$\operatorname*{Res}_{z_i}[X(z)z^{k-1}] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_i}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[X(z)z^{k-1}(z - z_i)]$$

**Ví dụ 7.4.** Cho $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ . Tìm x(k).

***Giải.*** Do X(z) có hai điểm cực là $z_1 = 1$ và $z_2 = 2$ có bậc bằng 1 nên :

$$\operatorname*{Res}_{z_1}[X(z)z^{k-1}] = \lim_{z\to 1}\frac{z^k}{z-2} = -1^k$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2}[X(z)z^{k-1}] = \lim_{z\to 2}\frac{z^k}{z-1} = 2^k$$

Suy ra: $x(k) = -1^k + 2^k$

## 7.3. Hàm truyền hệ rời rạc

### 7.3.1 Tìm hàm truyền từ phương trình sai phân


Xét hệ thống rời rạc với tín hiệu vào r(k), tín hiệu ra y(k) được mô tả bằng phương trình sai phân :

$$a_n y(k+n) + a_{n-1}y(k+n\text{-}1) + \ldots + a_0 y(k) = b_m r(k+m) + b_{m-1}r(k+m\text{-}1) + \ldots + b_0 r(k)$$

hay: $a_n y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_0 y_k = b_m r_{k+m} + b_{m-1}r_{k+m-1} + \ldots + b_0 r_k$

trong đó $n \ge m$, n gọi là bậc của hệ thống rời rạc.

Biến đổi Z hai vế ta được:

$$a_n z^n Y(z) + a_{n-1}z^{n-1}Y(z) + \ldots + a_0 Y(z) = b_m z^m R(z) + b_{m-1}z^{m-1}R(z) + \ldots + b_0 R(z)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0)Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_0)R(z)$$

$$\Leftrightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0} \qquad (7\text{-}9)$$

***G(z) được gọi là hàm truyền của hệ thống rời rạc.***

Hàm truyền cũng có thể biến đổi về dạng:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z^{-(n-m)}[b_m + b_{m-1}z^{-1} + \ldots + b_1 z^{-m+1} + b_0 z^{-m}]}{a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} \qquad (7\text{-}10)$$

Hai cách biểu diễn trên là tương đương nhau, trong thực tế cách biểu diễn thứ hai được sử dụng nhiều hơn.

**Ví dụ7.5.** Tìm hàm truyền của hệ thống mô tả bởi phương trình sai phân :

$$y(k+3) + 5y(k+2) - 8y(k+1) + 3y(k) = 2r(k+2) + r(k)$$

***Giải.*** Biến đổi Z hai vế của phương trình sai phân ta được:

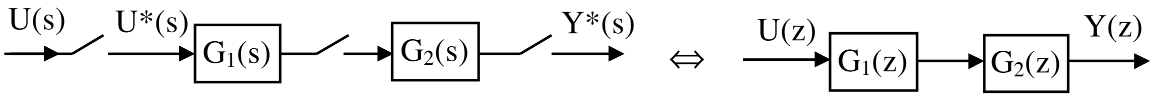
$$(z^3 + 5z^2 - 8z + 3)Y(z) = (2z^2 + 1)R(z)$$

$$\Rightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{2z^2 + 1}{z^3 + 5z^2 - 8z + 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{z^2(2+z^{-2})}{z^3(1+5z^{-1}-8z^{-2}+3z^{-3})}=\frac{z^{-1}(2+z^{-2})}{1+5z^{-1}-8z^{-2}+3z^{-3}}$$

### 7.3.2 Tìm hàm truyền từ sơ đồ khối

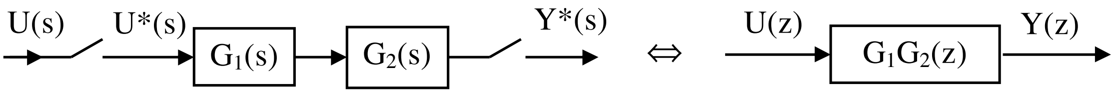
**1)** ***Hai khối nối tiếp qua khâu lấy mẫu***




***Hình 7.6***

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=Z[G_1(s)].Z[G_2(s)]=G_1(z).G_2(z)$$

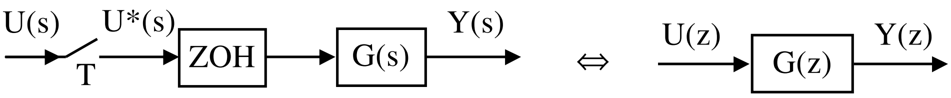
**2)** ***Hai khối nối trực tiếp***




***Hình 7.7***

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=Z[G_1(s).G_2(s)]\ =G_1G_2(z)$$

**3)** ***Hệ hở có khâu ZOH***

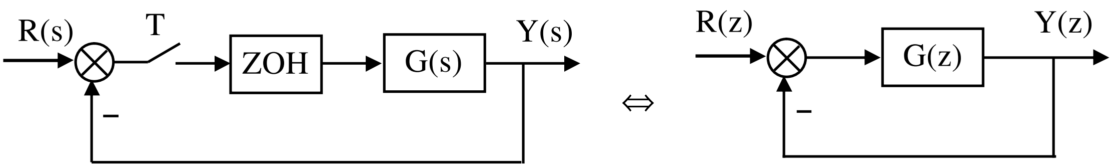



***Hình 7.8***

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=Z\left[G_{ZOH}(s).G(s)\right]=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}.G(s)\right]$$

$$=(1-z^{-1}).Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]=\left(\frac{z-1}{z}\right)Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

**4)** ***Hệ kín-cấu trúc 1***

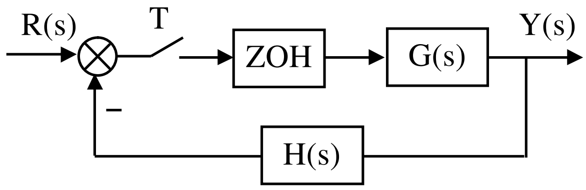



***Hình 7.9***

Hàm truyền hệ kín: $\quad G_k(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)}$

Hàm truyền hệ hở : $\quad G(z)=\left(\frac{z-1}{z}\right)Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$

**5)** ***<u>Hệ kín-cấu trúc 2</u>***




***Hình 7.10***

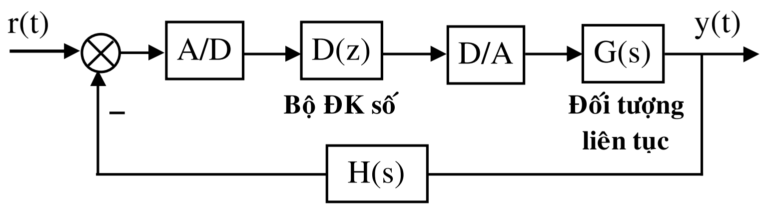
Hàm truyền hệ kín:

$$G_k(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

Trong đó : $G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$

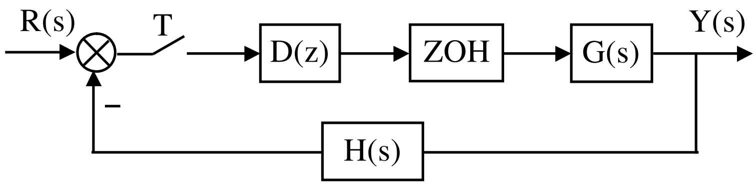
$$GH(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{G(s)H(s)}{s}\right]$$

**6)** ***<u>Hệ kín-cấu trúc 3</u>***




***Hình 7.11***

⇔



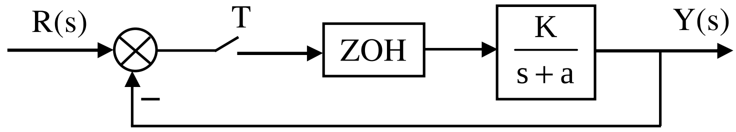

Hàm truyền hệ kín:

$$G_k(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)GH(z)}$$

Trong đó : $G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) . Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$

$$GH(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{G(s)H(s)}{s}\right]$$

**Ví dụ7.6.** Tìm hàm truyền của hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ:




Cho K = 1; a= 6; T=0,1sec.

***Giải.*** Hàm truyền hệ hở :

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{K}{s(s+a)}\right] = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{K}{a}\right) Z\left[\frac{a}{s(s+a)}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{K}{a}\right)\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})} = \left(\frac{K}{a}\right)\frac{(1-e^{-aT})}{(z-e^{-aT})}$$

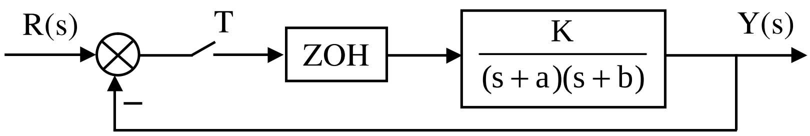
Thay K=1; a=6; T=0,1 ta được :

$$G(z) = \frac{(1-e^{-6T})}{6(z-e^{-6T})} = \frac{0,4512}{6(z-0,5488)} = \frac{0,0752}{z-0,5488}$$

Hàm truyền hệ kín:

$$G_k(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{\dfrac{0,0752}{z-0,5488}}{1+\dfrac{0,0752}{z-0,5488}} = \frac{0,0752}{z-0,4736}$$

**Ví dụ7.7.** Tìm hàm truyền của hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ:




Cho K=10, a= 1, b=5, Chu kỳ lấy mẫu T= 0,1.

***Giải.*** Hàm truyền hệ kín :

$$G_k(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left\{\frac{K}{s(s+a)(s+b)}\right\}$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right)\frac{Kz(Az+B)}{(z-1)(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})} = \frac{K(Az+B)}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$$

Với:

$$A = \frac{b(1-e^{-aT})-a(1-e^{-bT})}{ab(b-a)} \quad ; \quad B = \frac{ae^{-aT}(1-e^{-bT})-be^{-bT}(1-e^{-aT})}{ab(b-a)}$$

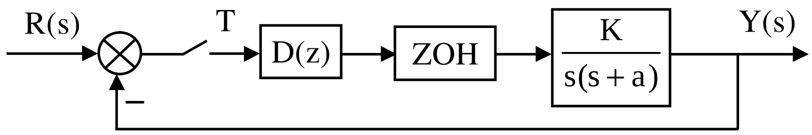
Thay K=10 ; a= 1, b=5, T= 0,1 ta được:

$$G(z) = \frac{0,04117z + 0,03372}{(z-0,9048)(z-0,6065)}$$

Do đó hàm truyền hệ kín :

$$G_k(z) = \frac{\dfrac{0,04117z + 0,03372}{(z-0,9048)(z-0,6065)}}{1+\dfrac{0,04117z + 0,03372}{(z-0,9048)(z-0,6065)}} = \frac{0,04117z + 0,03372}{z^2 - 1,47z + 0,5825}$$

**Ví dụ7.8.** Tìm hàm truyền của hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ:




Cho D(z) = 10; K =20 ; a= 5, chu kỳ lấy mẫu T= 0,1.

***Giải.*** Hàm truyền hệ kín :

$$G_k(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$$

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left\{\frac{K}{s^2(s+a)}\right\}$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left\{\frac{K}{a^2}\left(\frac{1}{(s+a)} + \frac{a}{s^2} - \frac{1}{s}\right)\right\}$$

$$= \frac{K}{a^2}\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z}{z-e^{-aT}} + \frac{aTz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1}\right)$$

$$= \frac{K}{a^2}\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z\left[(aT+e^{-aT}-1)z + (1-e^{-aT}-aTe^{-aT})\right]}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}\right)$$

$$= \frac{K}{a^2}\left(\frac{(aT+e^{-aT}-1)z + (1-e^{-aT}-aTe^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}\right)$$

Thế giá trị của K, a, T vào ta được:

$$G(z) = \frac{0,08522z + 0,07216}{(z-1)(z-0,6065)} = \frac{0,08522z + 0,07216}{z^2 - 1,6065z + 0,6065}$$

Do đó hàm truyền hệ kín là:

$$G_k(z) = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} = \frac{\dfrac{(10)(0,08522z + 0,07216)}{z^2 - 1,6065z + 0,6065}}{1+\dfrac{(10)(0,08522z + 0,07216)}{z^2 - 1,6065z + 0,6065}} = \frac{0,8522z + 0,7216}{z^2 - 0,7543z + 1,328}$$

## 7.4 Mô hình trạng thái hệ rời rạc

### 7.4.1 Lập phương trình trạng thái từ phương trình sai phân

**1) Vế phải không chứa sai phân của tín hiệu vào**

Xét hệ thống rời rạc có quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra mô tả bởi phương trình sai phân:

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_0y(k)=b_0r(k) \qquad (7\text{-}11)$$

Tương tự như đã làm với hệ liên tục, ta cũng đặt các biến trạng thái để biến đổi tương đương phương trình sai phân bậc *n* ở trên thành *n* phương trình sai phân bậc nhất.

Đặt các biến trạng thái như sau:

$$x_1(k)=y(k)$$
$$x_2(k)=x_1(k+1)=y(k+1)$$
$$x_3(k)=x_2(k+1))=y(k+2)$$
$$\ldots$$
$$x_n(k)=x_{n-1}(k+1)=y((k+n-1) \quad\Rightarrow\quad x_n(k+1)=y(k+n)$$

Thay vào phương trình sai phân bậc *n* ta được:

$$x_n(k+1)+a_{n-1}x_n(k)+\ldots+a_1x_2(k)+a_0x_1(k)=b_0r(k)$$

$$\Rightarrow\quad x_n(k+1)=-a_{n-1}x_n(k)-\ldots-a_1x_2(k)-a_0x_1(k)+b_0r(k)$$

Kết hợp phương trình trên với các biểu thức đặt biến trạng thái ta được:

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_2(k) \\ x_2(k+1)=x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1)=x_n(k) \\ x_n(k+1)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)-\ldots-a_{n-1}x_n(k)+b_0r(k) \end{cases}$$

Viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}r(k)$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

Ta được hệ phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Br(k) \\ y(k) = Cr(k) \end{cases}$$

trong đó:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Ví dụ 7.9.** Cho hệ thống mô tả bởi phương trình sai phân:

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 3y(k) = 2r(k)$$

Hãy viết phương trình trạng thái của hệ thống.

***Giải.*** Đặt các biến trạng thái:

$$x_1(k) = y(k); \quad x_2(k) = x_1(k+1) = y(k+1)$$

thì: $x_2(k+1) = y(k+2) = 2r(k) - 5y(k+1) - 3y(k)$

hay viết lại là:

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -3x_1(k) - 5x_2(k) + 2r(k)$$

Phương trình trạng thái là:

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} r(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

**2) Vế phải chứa sai phân của tín hiệu vào**

Xét hệ thống rời rạc mô tả bởi phương trình sai phân:

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + ... + a_0y(k) = b_nr(k+n) + b_{n-1}r(k+n-1) + ... + b_0r(k)$$

Đặt các biến trạng thái như sau:

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) - \beta_0 r(k) \\ x_2(k) = x_1(k+1) - \beta_1 r(k) \\ x_3(k) = x_2(k+1) - \beta_2 r(k) \\ ... \\ x_n(k) = x_{n-1}(k+1) - \beta_{n-1} r(k) \end{cases}$$

và đặt :

$$x_n(k+1) = -a_{n-1}x_n(k) - \dots - a_1 x_2(k) - a_0 x_1(k) + \beta_n r(k)$$

Ta sẽ xác định được:

$$\begin{cases} \beta_0 = b_n \\ \beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 \\ \beta_2 = b_{n-2} - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-2}\beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - a_{n-2}\beta_{n-2} - \dots - a_1\beta_1 - a_0\beta_0 \end{cases}$$

Từ đó ta có phương trình trạng thái :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Br(k) \\ y(k) = Cx(k) + Dr(k) \end{cases}$$

trong đó :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}; \quad C = [\,1 \;\; 0 \;\dots\; 0 \;\; 0\,]; \quad D = \beta_0 = b_n$$

### 7.4.2 Lập phương trình trạng thái từ hàm truyền

Cho hệ thống mô tả bởi hàm truyền:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0} \qquad (m < n) \qquad \text{(7-12)}$$

**Cách 1**: Biến đổi hàm truyền thành phương trình sai phân, rồi lập phương trình trạng thái từ phương trình sai phân.

**Cách 2**: Đặt biến phụ E(z) sao cho:

$$Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0)E(z)$$

$$R(z) = (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)E(z)$$

Từ định lý về hàm chuyển dịch ( *trang 161*), suy ra:

$$y(k) = b_m e(k+m) + b_{m-1}e(k+m-1) + \dots + b_0 e(k)$$

$$r(k) = e(k+n) + a_{n-1}e(k+n-1) + \dots + a_0 e(k)$$

Đặt các biến trạng thái:

$$x_1(k) = e(k)$$

$$x_2(k) = x_1(k+1) = e(k+1)$$

$\cdots$

$x_n(k) = x_{n-1}(k+1) = e(k+n-1)$

Từ đó ta có phương trình trạng thái:

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = x_3(k)$$
$$x_3(k+1) = x_4(k)$$
$$\ldots$$
$$x_n(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - \ldots - a_{n-1} x_n(k) + r(k)$$

Hay ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

**Ví dụ 7.10.** Cho hệ thống rời rạc có hàm truyền:

$$G(z) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2z^2 + 3z + 4}{z^3 + 5z^2 + 6z + 7}$$

Tìm mô hình không gian trạng thái của hệ.

***Giải.*** Đặt biến phụ E(z) sao cho:

$$Y(z) = (2z^2 + 3z + 4)E(z)$$
$$R(z) = (z^3 + 5z^2 + 6z + 7)E(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(k) = 2e(k+2) + 3e(k+1) + 4e(k) \\ r(k) = e(k+3) + 5e(k+2) + 6e(k+1) + 7e(k) \end{cases}$$

Đặt các biến trạng thái:

$$x_1(k) = e(k)$$
$$x_2(k) = x_1(k+1) = e(k+1)$$
$$x_3(k) = x_2(k+1) = e(k+2)$$

Từ đó ta có phương trình trạng thái:

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = x_3(k)$$
$$x_3(k+1) = -7x_1(k) - 6x_2(k) - 5x_3(k) + r(k)$$

Ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

Phương trình đáp ứng :

$$y(k) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

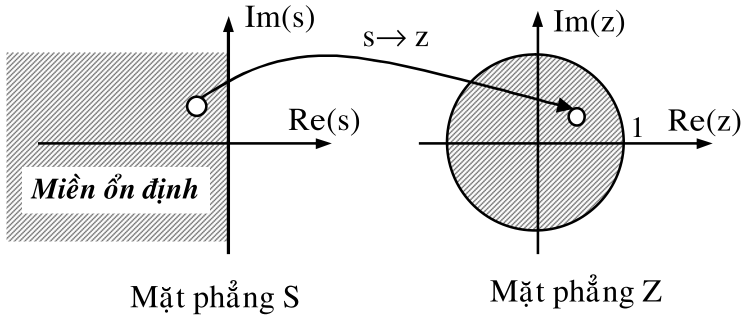
## 7.5 Phân tích hệ thống điều khiển rời rạc

### 7.5.1 Tính ổn định của hệ thống rời rạc

Khi khảo sát hệ liên tục, chúng ta đã biết là: Hệ thống điều khiển liên tục sẽ ổn định nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính đều nằm bên trái mặt phẳng phức ( tức là $\alpha_i = Re(s_i) < 0$) .

Với hệ rời rạc, do z= $e^{Ts}$ nên ta có kết luận tương ứng:

***Hệ thống điều khiển rời rạc sẽ ổn định nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính đều nằm trong vòng tròn đơn vị (tức là*** $|z_i| < 1$).




***Hình 7.12*** *Quan hệ giữa các mặt phẳng Z-S*

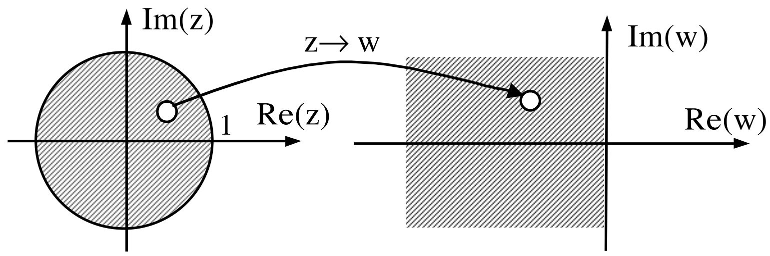
### 7.5.2 Tiêu chuẩn Routh–Hurwitz mở rộng

Để sử dụng được các tiêu chuẩn ổn định Routh–Hurwitz của hệ liên tục cho việc xét tính ổn định của hệ rời rạc ta phải dùng phép đổi biến :

$$z = \frac{w+1}{w-1} \qquad (7\text{-}13)$$

Phép đổi biến này biến miền ngoài vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng Z thành nửa phải của mặt phẳng W, và miền bên trong vòng tròn đơn vị thành nửa trái mặt phẳng W.

Thông qua phép biến đổi z-w, phương trình đặc tính F(z) = 0 của hệ sẽ được biến đổi thành phương trình đặc tính F(w) = 0 và ta có thể sử dụng các tiêu chuẩn Routh–Hurwitz với phương trình đặc tính F(w) = 0 này.




***Hình 7.13*** *Quan hệ giữa các mặt phẳng Z-W*

**Ví dụ 7.11** Xét tính ổn định của hệ thống rời rạc có phương trình đặc tính :

$$6z^3 + 2z^2 + 4z + 1 = 0$$

Đổi biến $z = \dfrac{w+1}{w-1}$, phương trình đặc tính trở thành:

$$6\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 + 2\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 4\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6(w+1)^3 + 2(w+1)^2(w-1) + 4(w+1)(w-1)^2 + (w-1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6(w^3 + 3w^2 + 3w + 1) + 2(w^3 + w^2 - w - 1) +$$

$$4(w^3 - w^2 - w + 1) + (w^3 - 3w^2 + 3w - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 13w^3 + 13w^2 + 15w + 7w = 0$$

Lập bảng Routh:

| | |
|---|---|
| 13 | 15 |
| 13 | 7 |
| 8 | 0 |
| 7 | |

Do tất cả các hệ số ở cột 1 bảng Routh đều dương nên hệ ổn định.

Hoặc: lập các định thức Hurwitz:

$$H_1 = a_1 = 15 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 13 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = 15(13) - 7(13) > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 H_2 = 13 H_2 > 0$$

Do các định thức đều dương nên hệ thống ổn định.

### 7.5.3 Tiêu chuẩn Nyquist–Bode mở rộng

Ta không thể sử dụng trực tiếp tiêu chuẩn ổn định Bode của hệ liên tục cho hệ rời rạc trong mặt phẳng Z vì mối quan hệ giữa z và s là $z = e^{sT}$. Tuy nhiên ta có thể sử dụng tiêu chuẩn Bode cho hệ rời rạc khi thực hiện phép đổi biến :

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} \tag{7-14}$$

Với phép biến đổi này, miền bên trong của vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng Z được ánh xạ thành nửa trái mặt phẳng W.

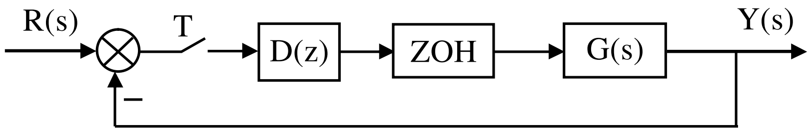
Sau khi thực hiện các phép biến đổi $G(s) \xrightarrow{z} G(z) \xrightarrow{w} G(w)$ ta thay w=jv và được hàm tần số G(jv). Vẽ biểu đồ Bode với G(jv) và áp dụng tiêu chuẩn ổn định Bode như trường hợp hệ liên tục.

### 7.5.4 Đáp ứng quá độ hệ rời rạc

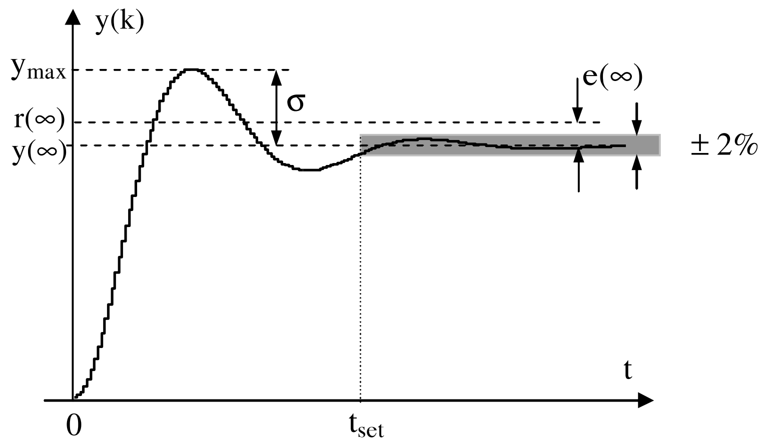
Đáp ứng quá độ của hệ thống rời rạc có thể xác định bằng cách tính Y(z), sau đó dùng phép biến đổi Z ngược để tìm hàm thời gian y(k).

Các hệ thống bậc cao có thể xấp xỉ gần đúng về hệ bậc hai có cặp cực trội. Với hệ liên tục, cặp cực trội là cặp cực nằm gần trục ảo nhất. Với hệ rời rạc, do $z = e^{Ts}$ nên cặp cực trội là cặp cực nằm gần vòng tròn đơn vị nhất.

Xét hệ thống hồi tiếp âm đơn vị có sơ đồ như hình vẽ:




Đáp ứng quá độ của hệ với tín hiệu vào bậc thang đơn vị sẽ có dạng điển hình như sau :




*Hình 7.14* *Đáp ứng quá độ của hệ rời rạc*

***Thời gian quá độ*** $\mathbf{t_s}$ hay $\mathbf{t_{set}}$ (settling time): là thời gian cần thiết để tín hiệu ra đạt và duy trì được giá trị xác lập với sai số cho phép. Thông thường sai số cho phép là $\pm 2\%$ hoặc $\pm 5\%$.

***Độ vọt lố s%*** hay **POT** (độ quá điều chỉnh, Percent Overshoot): là sai lệch giữa giá trị cực đại và giá trị xác lập của đáp ứng, tính theo phần trăm :

$$POT = \sigma\% = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} 100\% \qquad (7\text{-}15)$$

trong đó: $y_{max}$ là giá trị cực đại của y(k).

$y(\infty)$ là giá trị xác lập của y(k).

***Sai số xác lập*** được tính theo công thức:

$$e(\infty) = \lim_{k\to\infty} e(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})E(z) \qquad (7\text{-}16)$$

hoặc: $e(\infty) = r(\infty) - y(\infty)$ (7-17)

Nếu tín hiệu vào bậc thang đơn vị r(t)= 1(t) thì :

$r(\infty) = 1$ và: $R(z) = z/(z-1) = 1/(1-z^{-1})$

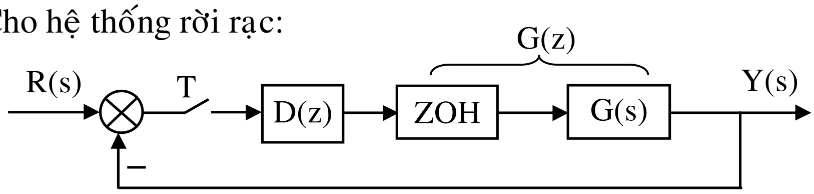
Theo định lý giá trị cuối:

$$y(\infty) = \lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})R(z)G_k(z) = \lim_{z\to 1} G_k(z)$$

Do đó: $e(\infty) = r(\infty) - y(\infty) = 1 - \lim_{z\to 1} G_k(z)$ (7-18)

**Ví dụ 7.12** Cho hệ thống rời rạc:




trong đó: $G(s) = \dfrac{1}{s+6}$; D(z) = 10; Chu kỳ lấy mẫu T= 0,01.

Tìm đáp ứng và sai số xác lập của hệ với tín hiệu vào bậc thang r(t)=1(t).

***Giải.*** $$G(z)=\left(\frac{z-1}{z}\right)Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$=\left(\frac{z-1}{z}\right)Z\left[\frac{1}{s(s+6)}\right]=\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\frac{z(1-e^{-6T})}{(z-1)(z-e^{-6T})}$$

$$=\frac{(1-e^{-6T})}{6(z-e^{-6T})}=\frac{0,009706}{z-0,9418}$$

Hàm truyền hệ kín:

$$G_k(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}=\frac{10G(z)}{1+10G(z)}=\frac{0,09706}{z-0,8447}$$

Tín hiệu vào: $r(t)=1(t) \;\Rightarrow\; R(z)=\dfrac{z}{z-1}$

$$\Rightarrow \quad Y(z)=R(z).G_k(z)=\left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{0,09706}{z-0,8447}\right)$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{0,09706}{(z-1)(z-0,8447)}=\frac{A_1}{(z-1)}+\frac{A_2}{(z-0,8447)}$$

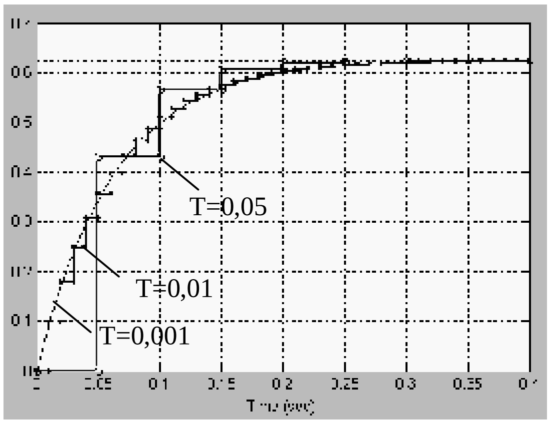
$$A_1=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{Y(z)}{z}=\lim_{z\to 1}\frac{0,09706}{z-0,8447}=0,625$$

$$A_2=\lim_{z\to 0,8447}(z-0,8447)\frac{Y(z)}{z}=\lim_{z\to 0,8447}\frac{0,09706}{z-1}=-0,625$$

$$\Rightarrow \quad Y(z)=\frac{0,625z}{z-1}-\frac{0,625z}{z-0,8447}$$

Biến đổi Z ngược ta được:

$$y(k)=(0,625)(1^k-0,8447^k)$$




Giá trị xác lập:

$$y(\infty)=\lim_{k\to\infty}y(k)=\lim_{z\to 1}G_k(z)=0,625$$

hoặc:

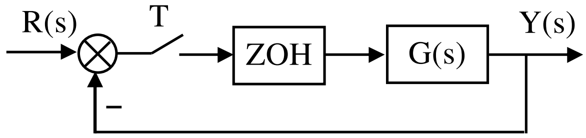
$$y(\infty)=\lim_{k\to\infty}y(k)=0,625\lim_{k\to\infty}(1^k-0,8447^k)=0,625(1-0)=0,625$$

Sai số xác lập:

$$e(\infty)=1-y(\infty)=0,375$$

Đáp ứng của hệ ứng với các chu kỳ lấy mẫu T khác nhau được biểu diễn trên hình vẽ. Giá trị T càng nhỏ thì đường biểu diễn càng trơn và càng giống với đáp ứng của hệ liên tục.

**Ví dụ 7.13.** Cho hệ thống :




trong đó: $G(s) = \dfrac{K}{s(s+a)}$; K=20; a=5; T= 0,1sec.

Tìm đáp ứng và sai số xác lập của hệ với tín hiệu vào bậc thang r(t)=1(t).

***Giải.***

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{K}{s^2(s+a)}\right]$$

$$= \frac{K}{a^2}\left(\frac{(aT + e^{-aT} - 1)z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}\right) \qquad \text{(xem ví dụ 7.8)}$$

Thế giá trị của K, a, T vào ta được:

$$G(z) = \frac{0,08522z + 0,07216}{(z-1)(z-0,6065)} = \frac{0,08522z + 0,07216}{z^2 - 1,6065z + 0,6065}$$

Hàm truyền hệ kín:

$$G_k(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0,08522z + 0,07216}{z^2 - 1,521z + 0,6787}$$

Đáp ứng của hệ kín:

$$Y(z) = R(z).G_k(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{0,08522z + 0,07216}{z^2 - 1,521z + 0,6787}\right)$$

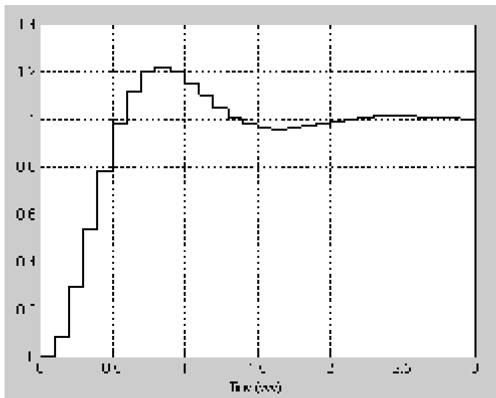
$$Y(z) = \frac{0,08522z^2 + 0,07216z}{z^3 - 2,521z^2 + 2.1997z - 0,6787}$$

$$= 0,0852z^{-1} + 0,2870z^{-2} + 0,5362z^{-3} + 0,7783z^{-4} + 0,9775z^{-5}$$

$$+ 1,1163z^{-6} + 1,1921z^{-7} + 1,2134z^{-8} + 1,1942z^{-9} + 1,1506z^{-10} + ...$$

Như vậy:

y(k)= {0; 0,0852; 0,2870; 0,5632; 0,7783; 0,9775; 1,1163; 1.1921; 1,2134; 1,1942; 1,1506; 1,0974; 1,0459; 1,0037; 0,9745; 0,9587; 0,9545; 0,9588; 0,9682; 0,9796; 0,9905; 0,9994; 1,0056; 1,0089; ... }



Đáp ứng xác lập:

$$y(\infty) = \lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1} G_k(z) = 1$$

Sai số xác lập:

$$e(\infty) = 1 - y(\infty) = 1 - 1 = 0$$

Thời gian quá độ (sai số ≤2%):

$t_{set2\%}$=20T=2 sec

tại đó y(20) = 0,9905

## 7.6 Thiết kế bộ điều khiển PID số

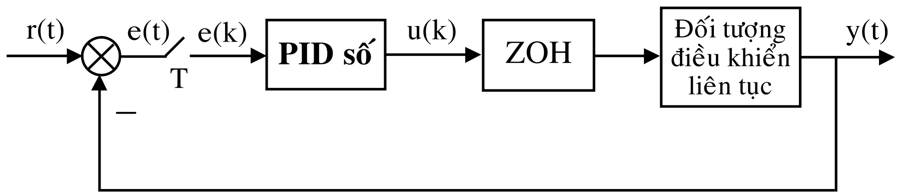
### 7.6.1 Khái quát

Có nhiều sơ đồ điều khiển khác nhau có thể áp dụng cho hệ rời rạc. Sơ đồ điều khiển thường dùng nhất trong công nghiệp là hiệu chỉnh nối tiếp với bộ điều khiển PID số.

Thiết kế bộ điều khiển PID số là xác định hàm truyền với các thông số tối ưu của bộ PID số để hệ thống thoả mãn yêu cầu về độ ổn định, chất lượng quá độ, sai số xác lập.

Thực tế bộ PID số nói riêng và các bộ điều khiển số nói chung chính là các thuật toán phần mềm chạy trên máy tính PC hay vi xử lý. Từ hàm truyền của bộ điều khiển ta suy ra được phương trình sai phân mô tả quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra của bộ điều khiển. Quan hệ này được sử dụng để lập trình phần mềm điều khiển chạy trên máy tính hoặc vi xử lý.

### 7.6.2 Mô tả toán bộ PID số




***Hình 7.15*** *Điều khiển với bộ PID số*

Xuất phát từ mô tả toán học của bộ PID liên tục:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_P(t) + u_I(t) + u_D(t) \\ &= K_P e(t) + K_I \int_0^t e(t)d(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \end{aligned} \quad (7\text{-}19)$$

Khi chuyển sang mô hình rời rạc của bộ PID số thì u(t) thay bằng $u_k$=u(k).

$$u_k = u_k^P + u_k^I + u_k^D \quad (7\text{-}20)$$

1) Khâu tỉ lệ $u_P(t) = K_P\, e(t)$ được thay bằng :

$$u_k^P = K_P e_k$$

$\Rightarrow$ Hàm truyền : $G_P(z) = \dfrac{U_P(z)}{E(z)} = K_P$ (7-21)

2) Khâu vi phân $u_D(t) = K_D \dfrac{de(t)}{dt}$ được thay bằng sai phân lùi :

$$u_k^D = K_D \frac{e_k - e_{k-1}}{T}$$

Biến đổi Z hai vế ta được:

$$U_D(z) = K_D \frac{E(z) - z^{-1}E(z)}{T} = \frac{K_D}{T}(1 - z^{-1})E(z) = \frac{K_D}{T}\frac{z-1}{z}E(z)$$

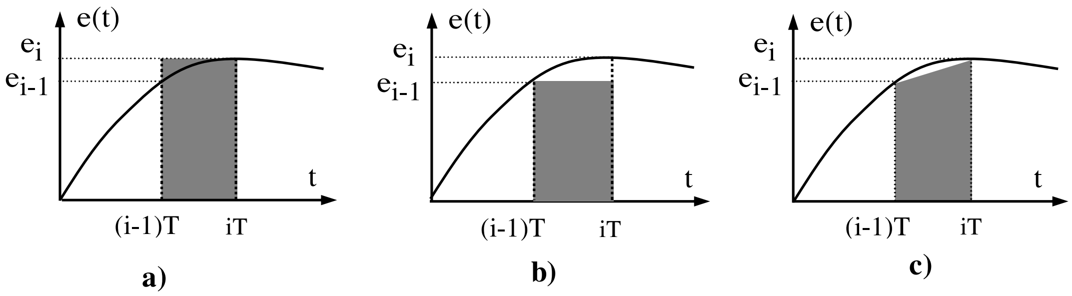
$\Rightarrow$ Hàm truyền : $G_D(z) = \dfrac{U_D(z)}{E(z)} = \dfrac{K_D}{T}\left(\dfrac{z-1}{z}\right)$ (7-22)

3) Khâu tích phân $u_I(t) = K_I\int_o^t e(t)dt$ có nhiều cách tính :

a) Tích phân chữ nhật lùi : $u_k^I = K_I\sum_{i=1}^{k} Te_i = u_{k-1}^I + K_I Te_k$

b) Tích phân chữ nhật tới : $u_k^I = K_I\sum_{i=1}^{k} Te_{i-1} = u_{k-1}^I + K_I Te_{k-1}$

c) Tích phân hình thang: $u_k^I = K_I\sum_{i=1}^{k} T\dfrac{e_{i-1}+e_i}{2} = u_{k-1}^I + T\dfrac{e_{k-1}+e_k}{2}$




***Hình 7.16.*** *Minh hoạ ba cách tính tích phân số*

Trong ba cách tính tích phân trình bày ở trên, tích phân hình thang cho kết quả chính xác nhất, do đó thực tế người ta thường sử dụng công thức:

$$u_k^I = u_{k-1}^I + T\frac{e_{k-1}+e_k}{2}$$

Biến đổi Z hai vế:

$$U_I(z) = z^{-1}U(z) + \frac{K_I T}{2}\left(z^{-1}E(z) + E(z)\right)$$

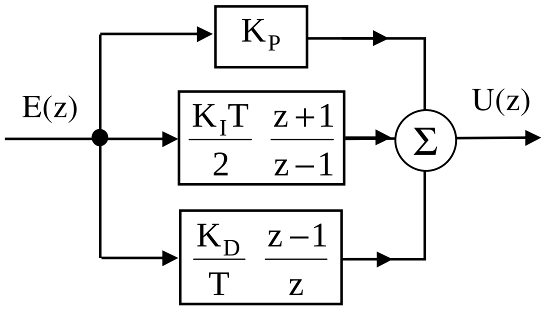
$\Rightarrow$ Hàm truyền : $G_I(z) = \dfrac{U_I(z)}{E(z)} = \dfrac{K_I T}{2}\left(\dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right) = \dfrac{K_I T}{2}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ (7-23)

Từ các hàm truyền cơ bản vừa phân tích ở trên, ta rút ra được hàm truyền của bộ PI, PD, PID số như sau:

$$G_{PI}(z) = K_P + \frac{K_I T}{2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad (7\text{-}24)$$

$$G_{PD}(z) = K_P + \frac{K_D}{T}\left(\frac{z-1}{z}\right) \quad (7\text{-}25)$$

$$G_{PID}(z) = K_P + \frac{K_I T}{2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + \frac{K_D}{T}\left(\frac{z-1}{z}\right) \quad (7\text{-}26)$$



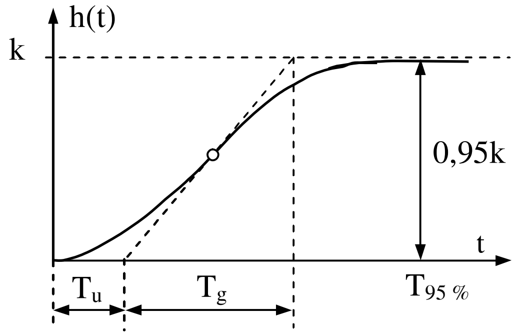

***Hình 7.17*** *Sơ đồ khối bộ PID số*

### 7.6.3 Xác định thông số bộ PID số bằng thực nghiệm

Tương tự như ở phương pháp thực nghiệm của Zigler-Nichole, Takahashi cũng đưa ra phương pháp xác định ba tham số $K_P$, $T_N$, $T_V$ của bộ PID số hoặc từ đáp ứng quá độ của đối tượng hoặc từ đáp ứng của hệ kín.

**1) Sử dụng đáp ứng quá độ của đối tượng**

Điều kiện để áp dụng được phương pháp Takahashi là đối tượng phải ổn định, có hàm quá độ h(t) đi từ 0 và có dạng hình chữ S, không vọt lố.




***Hình 7.18***

Hình 7.18 biểu diễn dạng h(t) chung cho những đối tượng có thể áp dụng được phương pháp Takahashi. Từ đường h(t) đó ta lấy được các giá trị :

- k là hệ số khuếch đại của đối tượng, được xác định từ h(t) theo $k = \lim_{t\to\infty} h(t)$
- $T_u$ là giá trị xấp xỉ của thời gian trễ. Nó là giao điểm của đường tiếp tuyến với h(t) tại điểm uốn với trục thời gian.
- $T_g$ là giá trị đặc trưng của quá trình quá độ. Nó là thời gian cần thiết để đường tiếp tuyến với h(t) tại điểm uốn đi được từ 0 tới k.
- $T_{95\%}$ là điểm thời gian mà h(t) đạt được giá trị 0,95k.

Thời gian lấy mẫu T có thể chọn từ đồ thị h(t) của đối tượng như sau:

- Xác định từ $T_u$ : Nếu $\frac{T_g}{T_u} < 12$ thì $\frac{T_u}{5} \le T \le \frac{T_u}{2}$
- Xác định từ $T_g$ : lấy $T \le 0{,}1T_g$
- Xác định từ $T_{95\%}$ : $0{,}05T_{95\%} \le T \le 0{,}1T_{95\%}$

Nói chung, nếu như thời gian lấy mẫu T được chọn đã thoả mãn $T \le 2T_u$ thì ba tham số $K_P$, $T_N$, $T_V$ của PID số sẽ được xác định từ k, $T_u$, $T_g$ như sau:

| Loại điều khiển | $K_P$ | $T_N$ | $T_V$ |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{T_g}{K_S(T_u+T)}$ | – | – |
| PI | $\frac{0{,}9\,T_g}{K_S\left(T_u+\frac{T}{2}\right)}$ | $3{,}33\left(T_u+\frac{T}{2}\right)$ | – |
| PID | $\frac{1{,}2\,T_g}{K_S(T_u+T)}$ | $\frac{2\left(T_u+\frac{T}{2}\right)^2}{T_u+T}$ | $0{,}5(T_u+T)$ |

$K_P$ : Hệ số khuếch đại của bộ điều khiển số.

$T_V = \frac{K_D}{K_P}$ : Thời gian vượt sớm

$T_N = \frac{K_P}{K_I}$ : Thời gian giữ trễ

**2) Sử dụng đáp ứng của hệ kín**

Phương pháp này thường áp dụng cho các đối tượng có khâu tích phân, ví dụ mức chất lỏng trong bồn chứa, vị trí hệ truyền động dùng động cơ... Đáp ứng quá độ của các đối tượng này tăng dần, không có dạng ổn định chữ S nên ta phải dùng đáp ứng của hệ kín.

1) Trước tiên điều chỉnh thành phần tích phân và vi phân đến trị số tối thiểu, tức là $K_I = 0$ và $K_D = 0$. Sau đó khởi động quá trình với độ khuếch đại thấp $K_P$. Tăng dần $K_P$ đến giá trị tới hạn $K_{th}$ để hệ kín có đáp ứng dao động điều hoà. Xác định (đo) chu kỳ $T_{th}$ của dao động.

2) Xác định $K_P$, $T_N$, $T_V$ của bộ PID số như sau:

| Bộ điều chỉnh | $K_P$ | $T_N$ | $T_V$ |
|---|---|---|---|
| P | $0{,}50\ K_{th}$ | – | – |
| PI | $0{,}45\ K_{th}$ | $0{,}83\ T_{th}$ | – |
| PID | $0{,}60K_{th}$ | $0{,}50\ T_{th}$ | $0{,}125\ T_{th}$ |

## PHỤ LỤC

# ÖNG DUNG MATLAB
# KHAO SAT HE THONG ÑIEU KHIEN TÖ ÑONG

Nội dung phụ lục này giới thiệu bộ công cụ Control System Toolbox của Matlab, bao gồm tập hợp các hàm (lệnh) chuyên dùng trong mô phỏng và phân tích hệ thống điều khiển.

Sau khi khởi động Matlab, cửa sổ lệnh Command window xuất hiện cùng dấu nhắc >> . Tại đây chúng ta thực hiện việc nhập lệnh và nhận kết quả tính toán. Sau khi nhập câu lệnh và kết thúc bằng động tác nhấn phím Enter, Matlab sẽ thực thi và trả về kết quả ngay dưới dòng lệnh. Ngoài ra, bạn có thể gõ lệnh >>**edit** để vào cửa sổ Editor, viết, lưu và chạy toàn bộ chương trình cùng lúc (thay vì gõ từng lệnh tại command window). Bước đầu làm quen với Matlab ta cần chú ý một số điểm sau:

- Matlab phân biệt chữ hoa và chữ thường. Nói chung các lệnh Matlab luôn viết bằng chữ thường. Các biến do người dùng tự đặt có thể là chữ hoa hay thường tuỳ ý.
- Dấu % dùng để ghi chú thích. Dòng ký tự sau dấu % sẽ không được Matlab xử lý.
- Bình thường Matlab luôn hiển thị kết quả câu lệnh. Nếu không muốn hiển thị bạn gõ thêm dấu chấm phẩy (;) vào cuối câu lệnh.
- Mỗi lệnh có thể có nhiều chức năng và đa dạng về cú pháp. Trong tài liệu này chỉ giới thiệu cách dùng cơ bản. Để tìm hiểu và khai thác hết các chức năng của lệnh, bạn gõ >> **help tênlệnh** hoặc >>**doc tênlệnh**.

### 8.1 MO TA PHAN TÖ VA HE THONG TUYEN TÍNH

#### 8.1.1 Mo ta phan tö lien tuc

1) Phần tử được mô tả toán bằng mô hình hàm truyền :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

có thể mô tả trong Matlab bằng 2 cách :

<u>**Cách 1**</u> : Dùng lệnh **tf** với cú pháp :

**SYS = tf(NUM,DEN)**

Trong đó,
- SYS là tên của phần tử hay hệ thống.
- NUM =[ $b_m$ $b_{m-1}$ … $b_o$ ] % đa thức tử số
- DEN = [ $a_n$ $a_{n-1}$ … $a_o$ ] % đa thức mẫu số

Ghi chú : Khi sử dụng, các chữ in hoa trong cú pháp lệnh có thể đổi tên tuỳ ý.

***Ví dụ 8-1:***

```
>> sys1= tf(5,[1 6 8])       % do tử số là bo=5 nên có thể nhập [5] hay 5 đều được.
Transfer function:
        5
  -------------
  s^2 + 6 s + 8
```

<u>**Cách 2**</u> : Dùng lệnh **s = tf('s')** để khai báo mô hình hàm truyền và biến s, sau đó nhập biểu thức toán của hàm truyền.

***Ví dụ 8-2:*** >> s = tf('s') ; sys2 = 5*(s+1)/((s+4)*(s+3)^2)

```
Transfer function:
         5 s + 5
  --------------------------
  s^3 + 10 s^2 + 33 s + 36
```

```
>> Kp=5; Ki=0.1; Kd= 3;
>> s = tf('s') ;  Gpid=Kp+Ki/s+Kd*s
Transfer function:
        3 s^2 + 5 s + 0.1
         -----------------
                 s
```

2) Phần tử được mô tả toán bằng mô hình zero-cực :

$$G(s) = K\frac{(s - z_1)(s - z_2)\,...(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\,...(s - p_n)}$$

có thể mô tả trong Matlab bằng lệnh **zpk** với cú pháp :

**SYS = zpk(Z,P,K)**

Trong đó:

$$\begin{cases} Z = [z_1 \quad z_2 \;\dots\; z_m] & \text{\% véctơ các zero (nghiệm của tử số)} \\ P = [p_1 \quad p_2 \;\dots\; p_n] & \text{\% véctơ các cực (pole, nghiệm của mẫu số)} \\ K = b_m / a_n & \text{\% Độ lợi (gain)} \end{cases}$$

Nếu tử số hàm truyền không có nghiệm thì lấy Z=[ ] (ma trận rỗng)

***Ví dụ 8-3:***

```
>> sys3 = zpk ( [ ], [-2 -4] , 5 )
    Zero/pole/gain:
             5
        -----------
       (s+2) (s+4)
```

Nếu biết hàm truyền, ta có thể tìm các zero và cực như sau:

| | |
|---|---|
| **z= zero(SYS)** | % Tìm vectơ z chứa các zero của hệ SYS |
| **[z,K]= zero(SYS)** | % Tìm vectơ z và độ lợi K của hệ SYS |
| **p= pole(SYS)** | % Tìm vectơ p chứa các cực của hệ SYS |

***Ví dụ 8-4:***

```
>>z= zero(sys2)        % sys2 đã mô tả ở ví dụ 8-2
z=-1

>>p=pole(sys2)

p= -4
   -3
   -3
```

3) Phần tử được mô tả toán bằng mô hình trạng thái :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Trong đó: A,B,C,D là các ma trận trạng thái.
u là tín hiệu vào, y là tín hiệu ra, x là biến trạng thái

có thể mô tả trong Matlab bằng lệnh **ss** với cú pháp:

**SYS = ss (A,B,C,D)**

***Ví dụ 8-5:*** >> A=[-2 -4;2 0] ; B=[1;0] ; C=[0.5 1] ; D=0;

```
>> sys4 = ss (A,B,C,D)
```

```
a =
                x1        x2
        x1      -2        -4
        x2       2         0
b =
                 u
        x1       1
        x2       0
c =
                x1        x2
         y      0.5        1
d =
                 u
         y       0
```

Continuous-time model.

4) Phần tử có trễ : Cũng được mô tả bằng các lệnh tf, zpk, ss nhưng có thêm tham số 'inputdelay' hoặc 'outputdelay' để khai báo thời gian trễ.

***Ví dụ 8.6:*** Mô tả phần tử trễ có hàm truyền $G(s) = e^{-0,2s} *4/(s+50)$

```
>> G_delay = tf(4,[1 50],'inputdelay',0.2)
```

```
Transfer function:
                    4
exp(-0.2*s) * ---------
                 s + 50
```

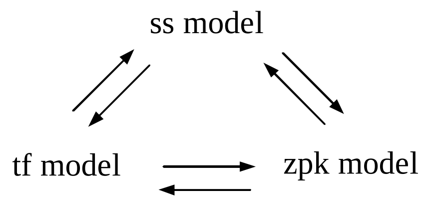
5) Chuyển đổi giữa các dạng mô hình

Các dạng mô hình có thể chuyển đổi qua lại bằng các lệnh ss, tf, zpk :

**SYSS= ss(SYS); SYST=tf(SYS); SYSZ=zpk(SYS)**

trong đó:

SYS : mô hình bất kỳ
SYSS : mô hình ss
SYST : mô hình tf
SYSZ : mô hình zpk




***Ví dụ 8-7 :***

>> G3 = tf(sys3) % chuyển sys3 có mô hình zpk ở ví dụ 8-3 về dạng hàm truyền

```
Transfer function:
        5
  ---------------
  s^2 + 6 s + 8
```

>> G4 = tf(sys4) % chuyển sys4 có mô hình ss ở ví dụ 8-5 về dạng hàm truyền

```
Transfer function:
      0.5s+2
 ----------------
  s^2 + 2s + 8
```

### 8.1.2 Mo ta phan tö rôi rac

§ Các hàm mô tả phần tử tuyến tính rời rạc có dạng tương tự như khi mô tả phần tử liên tục nhưng có thêm thông tin về thời gian lấy mẫu T (T>0). Nếu chưa xác định thời gian lấy mẫu thì đặt T= -1.

**SYS = tf(NUM,DEN,T)**

**SYS = zpk(Z,P,K,T)**

**SYS = ss (A,B,C,D,T)**

***Ví dụ 8-8:***

```
>> sys= tf([1 4],[1 2 8],0.1)      % hay  >> z= tf('z',0.1);  sys= (z+4)/ (z^2 + 2* z + 8)
    Transfer function:
              z+4
       ------------------
        z^2 + 2 z + 8
    Sampling time: 0.1
>> sys= tf(4,[1 3 5],-1)
    Transfer function:
              4
       ------------------
       z^2 + 3 z + 5
    Sampling time: unspecified
```

§ Có thể chuyển mô hình hệ liên tục thành mô hình hệ rời rạc bằng lệnh **c2d**:

**SYSD=c2d(SYSC,T)**

trong đó: **SYSC** là mô hình hệ liên tục (continuous system)
**SYSD** là mô hình hệ rời rạc (discrete system)
**T** là thời gian lấy mẫu

Hoặc chuyển mô hình hệ rời rạc thành mô hình hệ liên tục bằng lệnh **d2c** :

**SYSC=d2c(SYSD)**

***Ví dụ 8-9:***

```
>> Gs= tf([1 3],[1 2 8]);     % mô tả hệ liên tục có hàm truyền Gs
>> Gz=c2d(Gs,0.1)             % chuyển Gs thành hệ rời rạc có hàm truyền Gz
    Transfer function:
       0.1034 z - 0.07638
       ----------------------
     z^2 - 1.747 z + 0.8187
    Sampling time: 0.1
>> Gs= d2c(Gz)                % chuyển trở lại hệ liên tục
    Transfer function:
        s + 3
     --------------
     s^2 + 2 s + 8
```

## 8.2 KẾT NỐI CÁC PHẦN TỬ

Các dạng mô hình có thể chuyển đổi và kết nối lẫn nhau, tuy nhiên thứ tự ưu tiên trong Matlab lần lượt là: ss model > tf model > zpk model . Nghĩa là: khi kết nối một mô hình ss với mô hình tf hoặc zpk thì kết quả cuối cùng sẽ được Matlab biểu diễn ở dạng ss; Tương tự, khi kết nối một mô hình tf với mô hình zpk ta nhận được kết quả ở dạng tf .

***1) Ghép nối tiếp 2 phần tử*** : Dùng lệnh **series** hoặc toán tử "*"

**SYS = series (SYS1,SYS2)**

⇔ **SYS = SYS1* SYS2**

Lệnh **series** chỉ tính được hàm truyền tương đương của 2 phần tử nối tiếp, còn toán tử "*" có thể áp dụng cho số phần tử nối tiếp bất kỳ (2,3,4,…).

***Ví dụ 8-10:*** Tìm hàm truyền của ba phần tử nối tiếp

```
>> G1= tf(1,[1 4]) ; G2= tf(1,[1 0]); G3 = tf(1,[1 3]) ;
>>G12= series (G1,G2) ; G = series (G12,G3)
% hoặc  >> G = series(series (G1,G2),G3)
% hoặc >> G = G1*G2*G3
```

Kết quả :

```
Transfer function:
          1
  ------------------
s^3 + 7 s^2 + 12 s
```

***2) Tối giản hóa hàm truyền*** :

Lệnh **minreal** có tác dụng làm tối giản hóa hàm truyền của hệ thống bằng cách loại bỏ bớt các cặp zero/cực giống nhau. Với hệ có mô hình trạng thái, lệnh **minreal** sẽ loại bỏ các biến không điều khiển được hoặc không quan sát được.

Cú pháp : **SYS=minreal(SYS)**

***Ví dụ 8-11:***

```
>> G1= tf([1 2],[1 4]) ;   G2= tf(2,[1 2]);
>> G12= series (G1,G2)
   Transfer function:
          2 s + 4
        -------------
       s^2 + 6 s + 8
>>G12= minreal(G12)
   Transfer function:
          2
        -----
        s + 4
```

***3) Ghép song song 2 phần tử*** : Dùng lệnh **parallel** hoặc toán tử "**+**"

**SYS = parallel (SYS1,SYS2)**

⇔ **SYS = SYS1 + SYS2**

Lệnh **parallel** chỉ tính được hàm truyền tương đương của 2 phần tử ghép song song, còn toán tử "+" có thể áp dụng cho số phần tử song song bất kỳ (2,3,4,…).

***Ví dụ 8-12:*** >> G1= tf(1,[1 4]) ; G2= tf(1,[1 0]); G3 = tf(1,[1 3]) ;
>>G12= parallel (G1,G2) ; G = parallel (G12,G3);

% hoặc >>G = parallel (parallel (G1,G2), G3)

% hoặc >>G = G1 + G2 + G3

Kết quả :

Transfer function:

```
3 s^2 + 14 s + 12
------------------------
s^3 + 7 s^2 + 12 s
```

***4) Tìm mô tả toán của mạch vòng kín*** : Dùng lệnh **feedback**

- Phản hồi âm:

```
u --->O---->[ SYS1 ]----+---> y
     -|                 |           y = SYSK * u
      +-----[ SYS2 ]<---+
```

**SYSK = feedback(SYS1,SYS2)**

Với mạch phản hồi âm đơn vị (SYS2=1) thì: **SYSK = feedback(SYS1,1)**

- Phản hồi dương:

**SYSK = feedback(SYS1,SYS2,1)** % có thêm ký kiệu ",1" sau SYS2

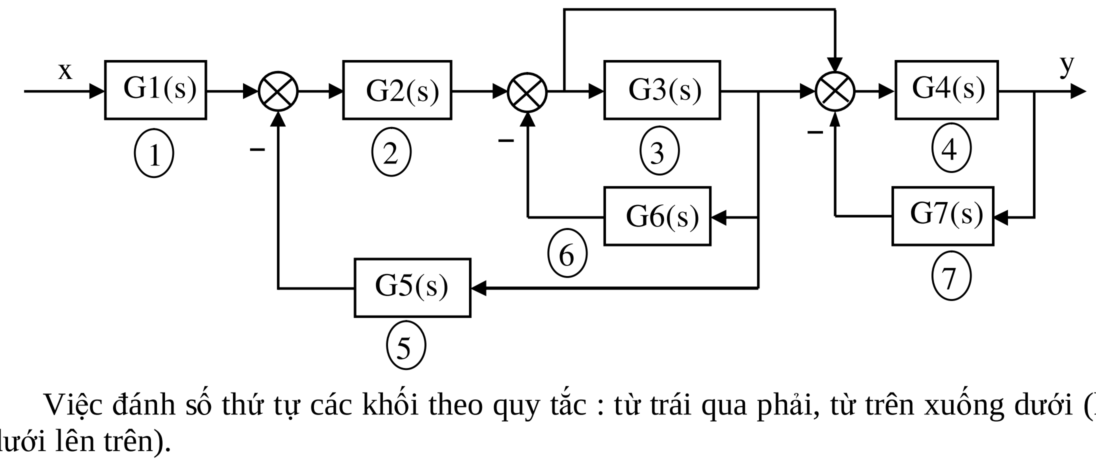
Với mạch phản hồi dương đơn vị (SYS2=1) thì: **SYSK = feedback(SYS1,1,1)**

***5) Tìm mô tả toán của hệ thống phức tạp***

Cách 1: Biến đổi sơ đồ khối để làm xuất hiện các dạng kết nối đơn giản rồi dùng các lệnh **series** , **parallel**, **feedback** hay các toán tử **"*", "+"** để lần lượt rút gọn sơ đồ khối từ trong ra ngoài.

Cách 2: Dùng các lệnh **append** và **connect**, theo thứ tự các bước như sau:

1) Vẽ sơ đồ khối của hệ thống và đánh số thứ tự các khối (các phần tử, các hệ con).
Ví dụ cần xác định hàm truyền của hệ thống gồm 7 khối sau :




Việc đánh số thứ tự các khối theo quy tắc : từ trái qua phải, từ trên xuống dưới (hoặc từ dưới lên trên).

2) Mô tả các hệ con SYSi trong Matlab bằng cách dùng các lệnh tf, ss, zpk đã nêu ở phần trước.

3) Dùng lệnh **append** để khai báo cho Matlab các hệ con tham gia vào hệ thống:

**SYSA= append(SYS1,SYS2,SYS3,SYS4,SYS5,SYS6,SYS7);**

4) Lập ma trận kết nối các hệ con và chỉ định các ngõ vào, ra của hệ thống:

Mỗi hàng của ma trận kết nối Q tương ứng với một hệ con. Số hạng đầu của mỗi hàng là chỉ số của hệ con, các số hạng tiếp theo biểu thị kết nối giữa ngõ vào của hệ con đó với ngõ ra của các hệ con khác. Ví dụ ngõ vào của hệ 2 là ngõ ra của hệ 1 và hệ 5, hệ 5 lại là phản hồi âm, do đó số hạng đầu trong hàng là 2, hai số hạng kế trong hàng là 1 và –5, các số 0 được thêm vào để tạo Q là ma trận chữ nhật.

```
Q= [1  0  0  0  0
    2  1 -5  0  0
    3  2 -6  0  0
    4  2 -6  3 -7
    5  3  0  0  0
    6  3  0  0  0
    7  4  0  0  0 ];
```

**input=1;** % vì ngõ vào của hệ thống là ngõ vào của khối 1

**output=4;** % vì ngõ ra của hệ thống là ngõ ra của khối 4

5) Dùng lệnh **connect** tìm mô tả toán của toàn hệ thống theo cú pháp:

**SYS = connect(SYSA,Q,input,output)**

Cách 3: Vẽ sơ đồ hệ thống trong môi trường SIMULINK của Matlab (kích hoạt bằng lệnh **simulink**) rồi dùng lệnh **linmod** để trích xuất các ma trận **A,B,C,D** của hệ thống :

**[A,B,C,D] = linmod ('model_filename')**

Trong đó tham số 'model_filename' là tên của file mô hình. Ví dụ, sau khi vẽ sơ đồ hệ thống trong SIMULINK ta lưu lại thành file "ht1.mdl" thì dùng lệnh **linmod** như sau :

**[A,B,C,D] = linmod ('ht1')**

Sau đó tuỳ nhu cầu có thể tìm mô tả hệ thống dưới dạng mô hình trạng thái:

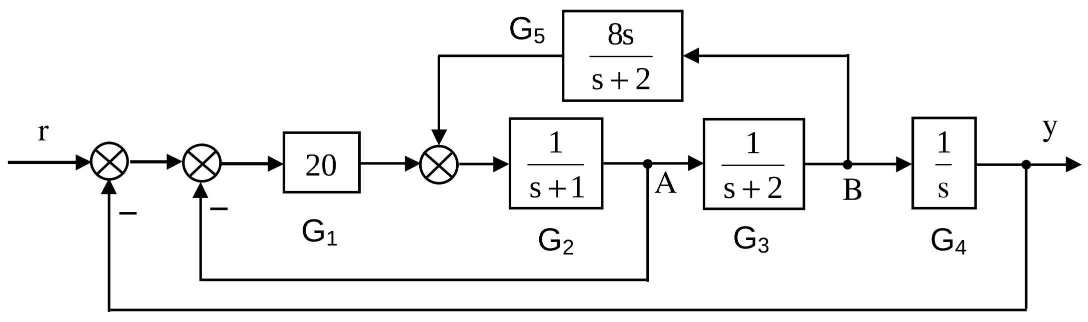
**SYS = ss (A,B,C,D)**

Hoặc chuyển về dạng hàm truyền : **SYS = tf(SYS)**

Với hệ thống rời rạc ta dùng lệnh **dlinmod** thay cho lệnh **linmod**

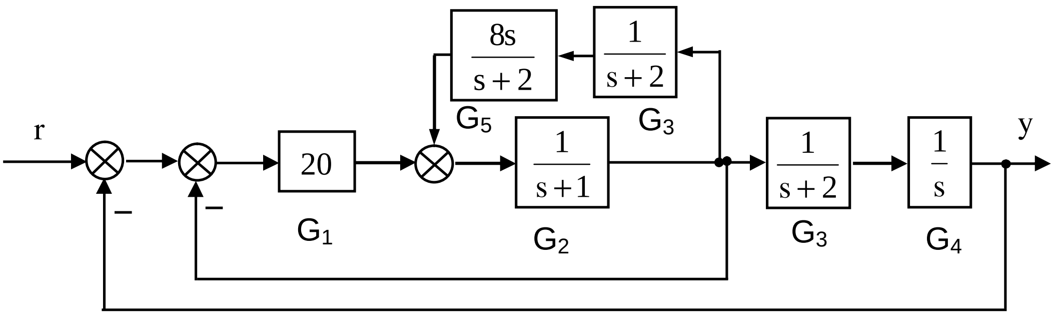
**[A,B,C,D] = dlinmod ('model_filename',T )**

***Ví dụ 8-13:*** Tìm hàm truyền của hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ :




***Giải:***

Cách 1: Trước tiên ta cần biến đổi sơ đồ khối về dạng tương đương để xuất hiện các dạng kết nối cơ bản, sau đó mới áp dụng được các hàm kết nối, tương tự như tính toán đại số sơ đồ khối trong lý thuyết điều khiển tự động.




Chương trình Matlab:

```
g1=20;
g2=tf(1,[1 1]);
g3=tf(1,[1 2]);
g4=tf(1,[1 0]);
g5=tf([8 0],[1 2]);
gtd1=feedback(g2,g5*g3,1);          % mạch hồi tiếp dương
gtd2=feedback(g1*gtd1,1);           % mạch hồi tiếp âm đơn vị
SYS=feedback(gtd2*g3*g4,1);         % mạch hồi tiếp âm đơn vị
SYS=minreal(SYS)                    % tối giản hoá hàm truyền
```

Kết quả :

```
        Transfer function:
                        20 s + 40
           ---------------------------------
           s^4 + 25 s^3 + 80 s^2 + 104 s + 40
```

Cách 2: Tính hàm truyền của hệ thống trực tiếp từ sơ đồ khối đã cho ban đầu, không cần thiết phải biến đổi sơ đồ.

Chương trình Matlab :

```
g1=20;
g2=tf(1,[1 1]);
g3=tf(1,[1 2]);
g4=tf(1,[1 0]);
g5=tf([8 0],[1 2]);
SYSA=append(g1,g2,g3,g4,g5);
Q =[1 -2 -4     % ngõ vào c ủa khối 1 là ngõ ra của các khối phản hồi âm 2 và 4
    2  1  5     % ngõ vào c ủa khối 2 là ngõ ra của các khối 1 và 5
    3  2  0     % ngõ vào c ủa khối 3 là ngõ ra của khối 2
    4  3  0     % ngõ vào c ủa khối 4 là ngõ ra của khối 3
    5  3  0] ;  % ngõ vào c ủa khối 5 là ngõ ra của khối 3
input=1;                  % ngõ vào của hệ thống là ngõ vào của khối 1
output=4;                 % ngõ ra của hệ thống là ngõ ra của khối 4
SYS=connect(SYSA, Q, input,output);
SYS=minreal(SYS)
```

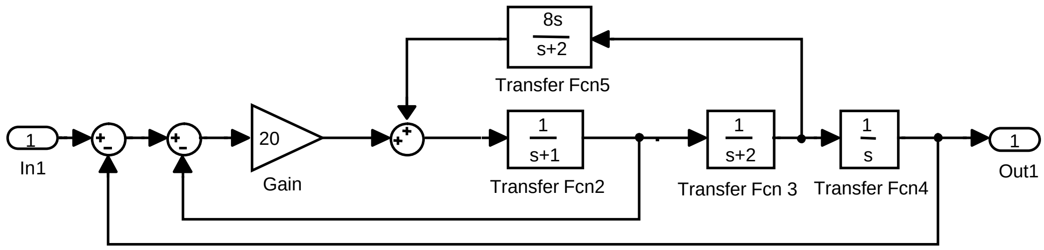
Kết quả :

Transfer function:

$$\frac{20\,s + 40}{s^4 + 25\,s^3 + 80\,s^2 + 104\,s + 40}$$

Cách 3 : Thực hiện hai bước :

- **Ø** Bước1: Vẽ sơ đồ hệ thống trong môi trường Simulink của MATLAB (kích hoạt bằng lệnh >>**simulink** ), lưu tên file là 'baitap_sdk1.mdl'.




- **Ø** Bước 2: Nhập và thực thi đoạn chương trình sau :

```
>>[A,B,C,D]=linmod('baitap_sdk1');
>>sys=ss(A,B,C,D);
>>sys=tf(sys);
>>sys=minreal(sys)
```

Kết quả :

Transfer function:

$$\frac{20\,s + 40}{s^4 + 25\,s^3 + 80\,s^2 + 104\,s + 40}$$

## 8.3 TÍNH TOAN VA VE BIEU ÑOÌ ÑAP ÖNG THÔI GIAN

### 1) Ñap öng bac thang

Lệnh **step** dùng để tính toán và vẽ đáp ứng bậc thang (hàm quá độ)

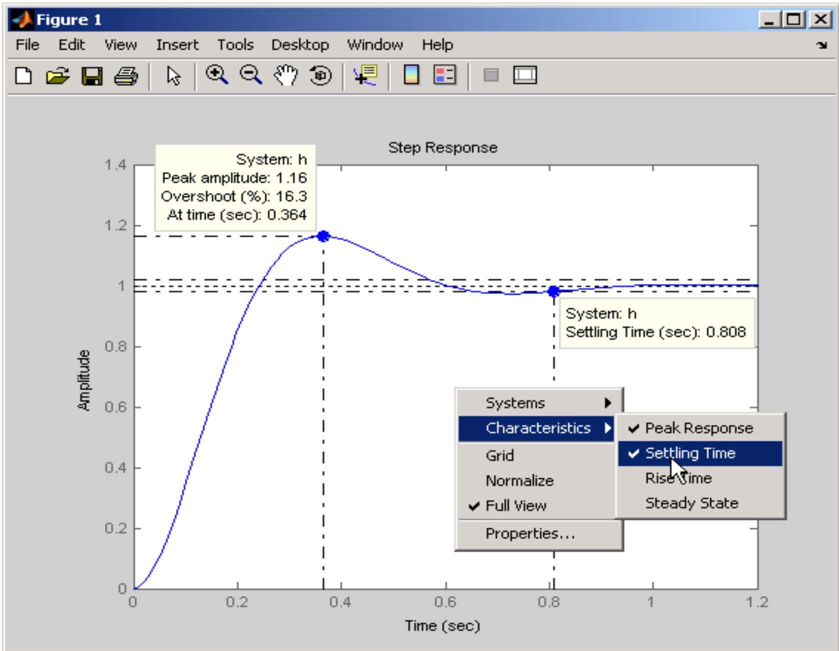
| LỆNH | Ý NGHĨA |
|---|---|
| **step(SYS)** | Vẽ biểu đồ đáp ứng bậc thang của hệ thống, khoảng thời gian do Matlab tự động xác định. |
| **step(SYS,T)** : | Vẽ biểu đồ đáp ứng bậc thang của hệ thống trong thời gian từ 0 đến T |
| **step(SYS1,SYS2,...,T)** | Vẽ đáp ứng của nhiều hệ thống trên cùng 1 hệ trục toạ độ |
| **[ y, t ] = step(SYS)** | Trả về dãy giá trị y tương ứng với vectơ thời gian t |

**SYS,SYS1,SYS2**, ... có thể là hệ liên tục hoặc rời rạc có mô hình dạng tf, zpk, hoặc ss bất kỳ như đã trình bày ở phần trước.

Sau khi vẽ biểu đồ ta có thể xác định các thông số quan trọng của đường đáp ứng như thời gian tăng (Risetime, 10 ÷ 90%), thời gian quá độ (Settlingtime, ± 2%), độ vọt lố (Overshoot), giá trị xác lập y(∞)… bằng cách nhấp phải chuột vào vùng trống bất kỳ trên đồ thị để xuất hiện menu danh sách thả xuống (popup-menu) và chọn mục tương ứng.

Hình dưới đây minh hoạ kết quả sau khi nhấp chuột phải vào vùng trống trên đồ thị và lần lượt chọn Characteristics > Settling Time, sau đó nhấp chuột trái vào dấu tròn vừa xuất hiện trên đồ thị để hiển thị giá trị thời gian quá độ.

- Để hiển thị độ vọt lố, chọn Characteristics > Peak Response >...
- Để hiển thị giá trị xác lập y(∞), chọn Characteristics > Steady State >...




Nếu bạn nhấp chuột trái vào điểm bất kỳ trên đường đáp ứng, MATLAB sẽ hiển thị các giá trị hoành độ, tung độ (tương ứng là thời gian và biên độ) tại điểm đó. Nếu bạn nhấp trái rồi rê chuột dọc theo đường đáp ứng, các giá trị trên sẽ hiển thị liên tiếp.

Để tìm đáp ứng bậc thang của hệ thống **dưới dạng hàm số theo thời gian t** (thay vì dạng đồ thị) khi biết hàm truyền G của hệ, ta có thể áp dụng các hàm xử lý biểu thức chữ như sau:

```
[n,d]=tfdata(G,'v');    % tìm véctơ hệ số của tử và mẫu số hàm truyền G.
syms s                  % khai báo biến symbolic (biến chữ) là s
num=poly2sym(n,s);      % tạo biểu thức symbolic của tử số theo biến s
den=poly2sym(d,s);      % tạo biểu thức symbolic của mẫu số theo biến s
G=num/den               % biểu diễn hàm truyền G dưới dạng biểu thức symbolic
Y=G/s                   % ảnh Laplace Y(s) của hàm quá độ
y=ilaplace(Y)           % hàm quá độ y(t)
```

2) Ñap öng xung

Dùng lệnh **impulse** để tính và vẽ đáp ứng xung (hàm trọng lượng) của hệ thống.
Cú pháp của lệnh **impulse** giống như lệnh **step**.

**impulse(SYS)**
**impulse(SYS,T)**
**impulse(SYS1,SYS2,...,T)**
**[y,t]=impulse(SYS)**

### 3) Ñap öng tín hieu vao bat ky

- Dùng lệnh **lsim** để tìm đáp ứng thời gian của hệ thống đối với tín hiệu vào bất kỳ.

**lsim(SYS,u,t) :** vẽ đáp ứng với tín hiệu vào u bất kỳ trong khoảng thời gian t.

**[y,t] = lsim(SYS,u,t)** : trả về dãy giá trị đáp ứng y tương ứng với vectơ thời gian t.

- Một số ví dụ tạo tín hiệu vào:

```
>>t= 0:0.01:1;
>>u= ones(size(t)); plot(t,u)        % unit step (bậc thang đơn vị) u=1(t)
>>u=  5*ones(size(t));               % step (bậc thang)  u=5(t)
>>u= [1;zeros(100,1)];               % impulse (xung nhọn đơn vị)
>>u= t ;                             % ramp (hàm dốc)
>>u= t.^2 ;                          % parabol
>>u= square(4*t) ;                   % xung vuông
>>u =sin(t)                          %  sóng sin
```

Có thể tạo nhanh các tín hiệu vào dạng sóng bằng hàm **gensig** :

**[u,t] = gensig(typ,tau)**

**[u,t] = gensig (typ,tau,Tf,Ts)**

Bằng tham số **typ** ta có thể khai báo loại tín hiệu: sóng sin ('**sin**'), sóng vuông ('**square**'), hoặc dãy xung nhọn ('**pulse**'). Tín hiệu do **gensig** tạo ra có biên độ chuẩn là 1đơn vị. Chu kỳ của tín hiệu được khai báo nhờ tham số **tau**. **Tf** là khoảng thời gian tác động và **Ts** là thời gian lấy mẫu (chu kỳ lấy mẫu). Véctơ thời gian t được Matlab tự động chọn hoặc tính theo Tf và Ts.

## 8.4 TÍNH TOAN VA VE BIEU ÑO ÑAP ÖNG TAN SO

Chất lượng của ***hệ kín*** trong miền tần số được đánh giá qua đáp ứng tần số, cụ thể là biểu đồ Nyquist và biểu đồ Bode của ***hệ hở*** tương ứng.

Các cấu trúc lệnh sau đây thường dùng để tính và vẽ đáp ứng tần số :

| LỆNH | Ý NGHĨA |
|---|---|
| **nyquist(SYS)** | Vẽ biểu đồ Nyquist của hệ SYS |
| **bode(SYS)** | Vẽ biểu đồ Bode của hệ SYS |
| **margin(SYS)** | Vẽ biểu đồ Bode và hiển thị giá trị dự trữ biên độ, dự trữ pha,... ngay trên biểu đồ |
| **[Gm,Pm,Wgm,Wpm]= margin(SYS)** | Tính toán độ dự trữ biên độ, dự trữ pha, tần số cắt biên, tần số cắt pha |

Giá trị dự trữ biên độ Gm do hàm margin tính ra là giá trị tự nhiên (không đơn vị) , để chuyển đổi sang giá trị dB (decibel) ta dùng công thức **Gm_dB= 20*log10(Gm)**.

Với hệ rời rạc , hàm **bode** sẽ áp dụng thuật toán biến đổi $z = e^{j\omega T}$ (trong đó T là thời gian lấy mẫu) để ánh xạ vòng tròn đơn vị thành trục tần số thực . Do hàm truyền tần số của hệ rời rạc có tính tuần hoàn với chu kỳ $2\pi/T$ nên với hệ rời rạc, hàm **bode** chỉ tính đáp ứng cho những điểm tần số nhỏ hơn tần số tới hạn $\pi/T$.

## 8.5 GIAO DIEN LTIViewer

Giao diện đồ hoạ LTIViewer được kích hoạt bằng lệnh **ltiview**. Với giao diện LTIViewer bạn có thể cùng một lúc khảo sát đặc tính động học của nhiều hệ thống tuyến tính bất biến, và đối với mỗi hệ thống lại có thể vẽ được tất cả các dạng đặc tính động học. Do có thể vẽ được trên cùng một cửa sổ nên bạn có thể dễ dàng nhận thấy được mối liên hệ giữa các dạng đặc tính động học, ví dụ đáp ứng xung là đạo hàm của đáp ứng bậc thang, đỉnh cộng hưởng trên biểu đồ Bode có biên độ càng cao thì độ vọt lố trên đáp ứng bậc thang càng cao, sự liên hệ giữa biểu đồ Bode và biểu đồ Nyquist,…

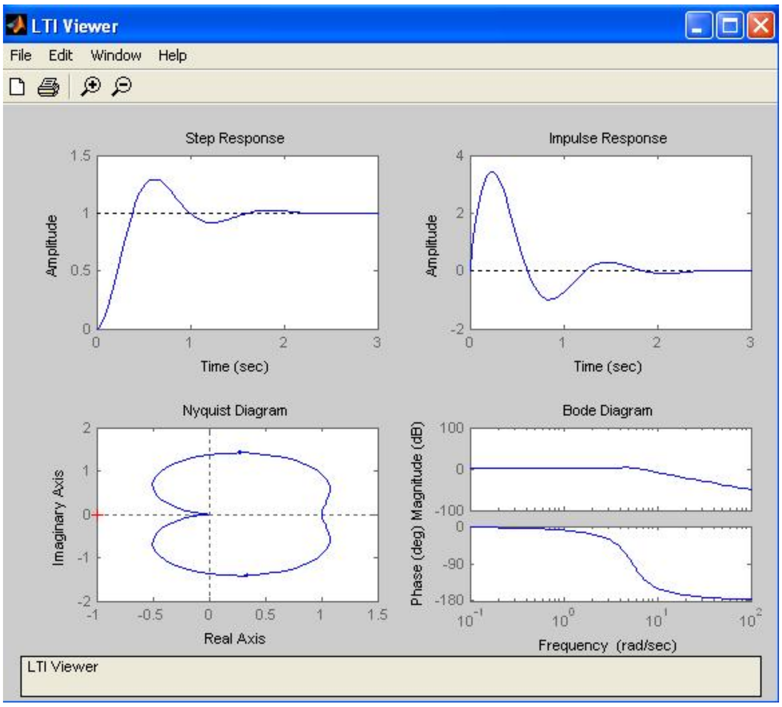
Một số cách thường dùng của lệnh **ltiview** :

| LỆNH | Ý NGHĨA |
|---|---|
| **ltiview(PLOTTYPE, SYS)** | Vẽ các biểu đồ chỉ định bởi tham số PLOTTYPE . PLOTTYPE có thể là 'step', 'impulse', 'nyquist', bode',… hoặc tổ hợp {'step'; 'impulse'; 'nyquist'; bode',…} |
| **ltiview(SYS1,SYS2,…,SYSN)** | Vẽ biểu đồ step của nhiều hệ thống |
| **ltiview(PLOTTYPE,SYS1,SYS2,…,SYSN)** | Vẽ các biểu đồ chỉ định bởi PLOTTYPE của nhiều hệ thống |

***Ví dụ 8-14:***

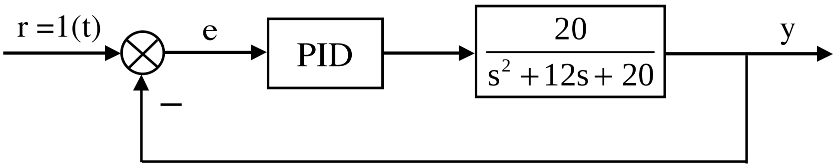
```
>> G=tf(10,[1 2 10])

Transfer function:
       10
 --------------
s^2 + 2 s + 10

>> ltiview({'step';'impulse';'nyquist';'bode'},G)
```

Từ menu edit hoặc từ popup-menu khi nhấp chuột phải trong cửa sổ LTIViewer, bạn có thể chọn lựa các thiết đặt về cấu hình như số lượng đồ thị, loại đồ thị, hiển thị hoặc tắt hiển thị các thông số chất lượng trên các đồ thị,…



## 8.6 VÍ DỤ ỨNG DỤNG

***Ví dụ 8-15*** Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ :




Chọn $K_P = 16$; $K_I = 60$; $K_D = 1$

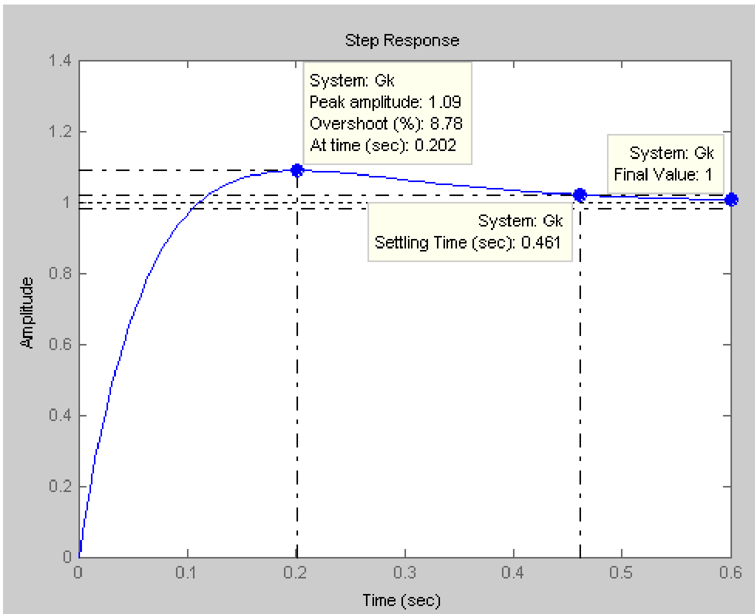
Viết chương trình Matlab thực hiện các yêu cầu sau:

a) Tìm hàm truyền, hàm quá độ và sai số xác lập $e(\infty)$ của hệ thống.

b) Vẽ biểu đồ hàm quá độ và xác định giá trị xác lập $y(\infty)$, độ vọt lố, thời gian quá độ.

***Giải.*** Chương trình Matlab:

```
Kp =16; Ki =60; Kd =1;
s=tf('s'); Gc=Kp + Ki/s + Kd*s;   % hàm truyền bộ PID
% Gc=tf ([1  16  60], [1  0])       % một cách khác để khai báo hàm truyền bộ PID
G=tf(20,[1 12 20]);                % hàm truyền của đối tượng
Gk=feedback(Gc*G,1) ;              % hàm truyền hệ kín
Gk=minreal(Gk)                     % tối giản hoá hàm truyền hệ kín.
saisoxl=1-dcgain(Gk)               % Tính sai số xác lập
step(Gk)                           % Vẽ biểu đồ đáp ứng quá độ
syms s
[n,d]=tfdata(Gk,'v');
n=poly2sym(n,s);
d=int16(d);
d=poly2sym(d,s);
Gk=n/d
Y=Gk/s;
y=ilaplace(Y)
```




Kết quả khi chạy chương trình:

```
Transfer function:

   20 s + 120
 ---------------
 s^2 + 22 s + 120

saisoxl = 0

Gk = (20*s+120)/(s^2+22*s+120)

y = 1-5*exp(-12*t)+4*exp(-10*t)
```

% $y(t) = 1 - 5e^{-12t} + 4e^{-10t}$

Từ đồ thị step ta xác định được các thông số chất lượng :

Giá trị xác lập (Final value) =1

Độ vọt lố (Overshoot) = 8,78%

Thời gian quá độ ( settling time) = 0,461 sec

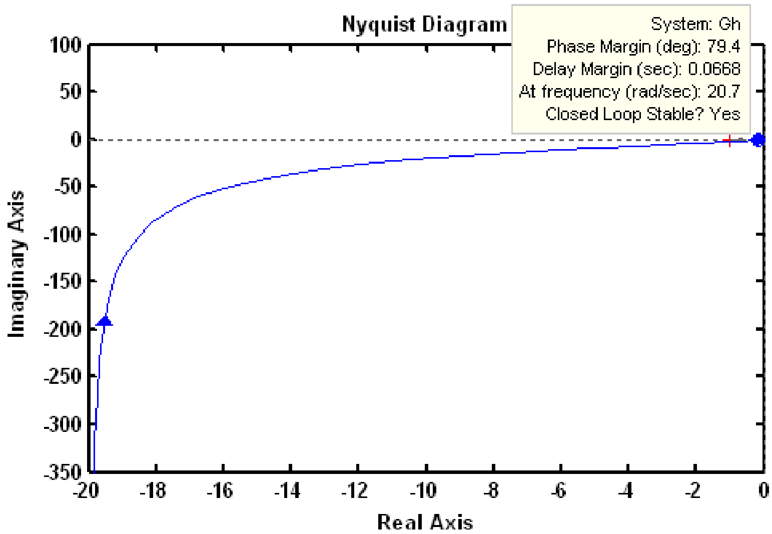
***Ví dụ 8-16*** Xác định độ dự trữ ổn định biên độ và pha của hệ thống cho ở ví dụ 8-15.

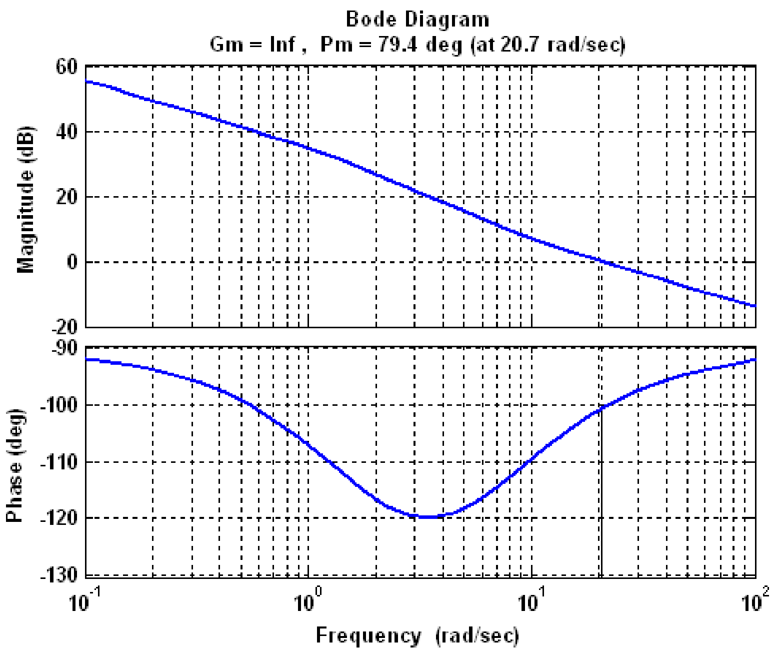
***Giải.*** Chương trình Matlab:

```
Gc=tf ([1 16 60], [1 0]);   % hàm truyền bộ PID
G=tf(20,[1 12 20]);         % hàm truyền của đối tượng
Gh= Gc*G ;                  % hàm truyền hệ hở
Gh=minreal(Gh)              % tối giản hoá hàm truyền
nyquist (Gh)                % Vẽ biểu đồ Nyquist hệ hở
figure(2); margin(Gh)       % Vẽ biểu đồ Bode hệ hở
```

Kết quả :

```
Transfer function:     % hàm truyền hệ hở
   20 s + 120
   ----------
   s^2 + 2 s
```




Từ biểu đồ ta xác định được độ dự trữ biên độ GM = ∞ ; độ dự trữ pha PM=79,4°, tần số cắt biên ωc = 20,7 rad/sec, tần số cắt pha $\omega_{(-180°)}$ = ∞ (không tồn tại, vì biểu đồ Bode pha không cắt đường thẳng -180°).

***Ví dụ 8-17*** Khảo sát đáp ứng quá độ của hệ thống cho ở ví dụ 8-15 với các giá trị thay đổi của thông số bộ PID, ví dụ:

a) $K_P$ =16; $K_D$ =1; $K_I$ =1 c) $K_P$ =16; $K_D$ =1 ; $K_I$ =100

b) $K_P$ =16; $K_D$ =1; $K_I$ =20 d) $K_P$ =16; $K_D$ =1; $K_I$ =300

***Giải.*** **<u>Cách 1</u>**: Lần lượt khai báo từng bộ PID và tính các hàm truyền hệ kín.

```
G=tf(20,[1 12 20])
Gc1=tf ([1 16  1], [1  0]) , Gk1=feedback(Gc1*G,1)
Gc2=tf ([1 16  20], [1  0]) ; Gk2=feedback(Gc2*G,1)
Gc3=tf ([1 16  100], [1  0]) ; Gk3=feedback(Gc3*G,1)
Gc4=tf ([1 16  300], [1  0]) ; Gk4=feedback(Gc4*G,1)
step(Gk1,'b-', Gk2,'g--', Gk3,'m-.', Gk4,'k:', 1)      % vẽ đồ thị đáp ứng quá độ.
legend('Ki=1','Ki=20','Ki=100','Ki=300') ; grid    % tạo chú thích và ô lưới cho đồ thị.
```

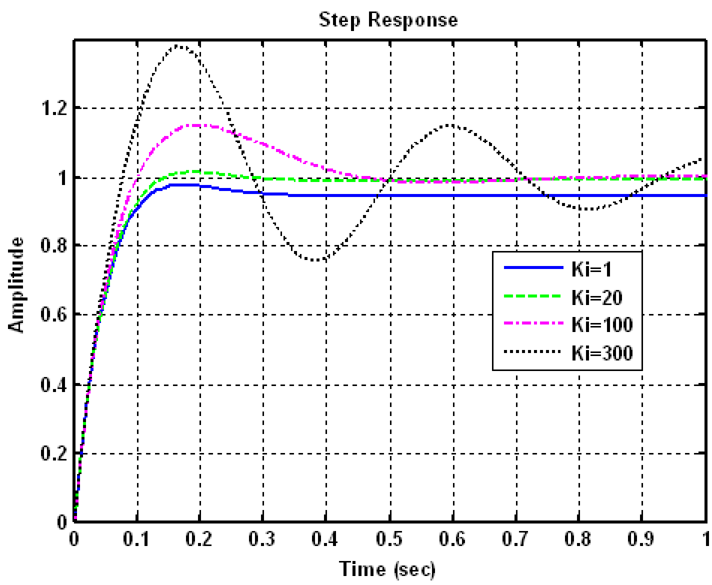
*<u>Giải thích:</u>* Lệnh step ở trên vẽ các đường đáp ứng trong khoảng t=0÷1(sec) kết hợp với chỉ định màu sắc (b=blue; g=green; m=magenta; k=black) và nét vẽ (-, --, -. , :).

Đơn giản hơn, có thể dùng lệnh: step(Gk1,Gk2,Gk3,Gk4,1).Khi đó, Matlab sẽ tự động chọn màu theo thứ tự : <u>b</u>lue, <u>g</u>reen, <u>r</u>ed, <u>c</u>yan, <u>m</u>agenta,… và mặc định là kiểu nét liền (-).

**<u>Cách 2:</u>** Khai báo bằng vòng lặp

```
G=tf(20,[1 12 20]);   Kp=16;Kd=1;  Ki=[1, 20, 100, 300];
  for n=1:length(Ki)
        Gpid=tf([Kd Kp Ki(n)],[1 0]);
        eval(['Gk',num2str(n),'=feedback(Gpid*G,1)'])
  end
step(Gk1,'b-',Gk2,'g--',Gk3,'r-.',Gk4,'k:',1);
legend('Ki=1','Ki=20','Ki=100','Ki=300'); grid
```

<u>Kết quả</u> :

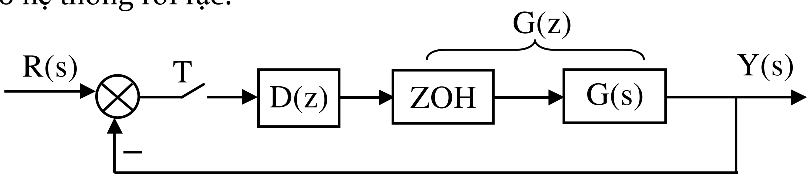



Dùng chuột phải để thao tác trên đồ thị, ta có thể xác định được các thông số chất lượng của đường đáp ứng tương tự như ở ví dụ 8-15.

Cũng có thể nhập các công thức đã nêu ở chương 5 vào Matlab để thực hiện tính toán và kiểm tra các thông số chất lượng trên đồ thị.

Từ đồ thị ta thấy khi tăng $K_I$ thì độ vọt lố POT sẽ tăng nhưng sai số e(∞)=0, ngay cả trường hợp $K_I$ =1 nếu vẽ đáp ứng trong thời gian dài hơn ta sẽ thấy rõ hệ cũng về xác lập với sai số e(∞) bằng 0 nhưng thời gian quá độ lớn: 17,8 sec). Nếu tăng $K_I$ vượt quá giá trị giới hạn thì hệ kín sẽ mất ổn định.

*__Ví dụ 8.18__* Cho hệ thống rời rạc:

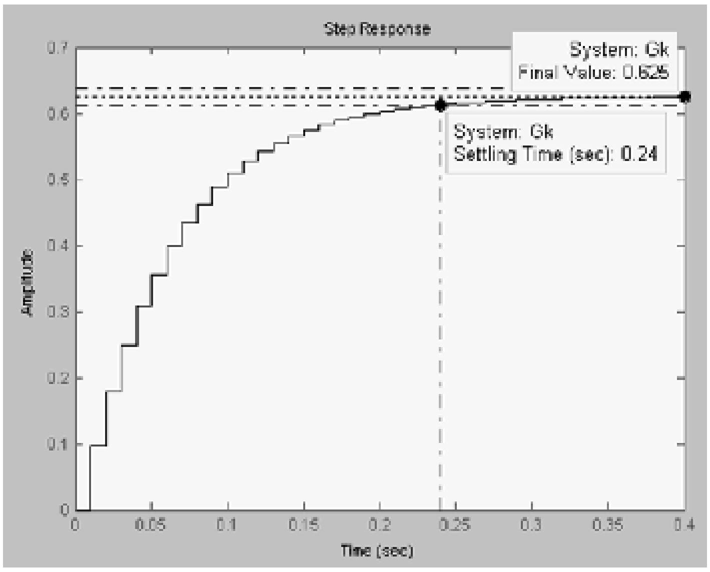



trong đó: $G(s) = \dfrac{1}{s+6}$; D(z) = 10; Chu kỳ lấy mẫu T= 0,01. Tín hiệu vào r(t)=1(t)

1) Tìm hàm truyền đạt và sai số xác lập của hệ .
2) Vẽ đáp ứng bậc thang và xác định giá trị xác lập, thời gian quá độ.
3) Tìm dãy giá trị tín hiệu ra y(t) khi t thay đổi từ 0.1 đến 0.2

***Giải.*** Chương trình Matlab:

```
Gs=tf(1,[1 6]);
Gz=c2d(Gs,0.01);
Dz=10;
Gk=feedback(Dz*Gz,1);
Gk=minreal(Gk)
saisoxl =1-dcgain(Gk)
step(Gk,0.4)
[y,t]=step(Gk,[0.1: 0.01: 0.2]);
y_t = [y,t]
```




Kết quả :

```
Transfer function:
        0.09706
       ----------
       z - 0.8447
        Sampling time: 0.01
saisoxl =
        0.3750
y_t =
          0.5094    0.1000
          0.5274    0.1100
          0.5425    0.1200
          0.5553    0.1300
          0.5661    0.1400
          0.5753    0.1500
          0.5830    0.1600
          0.5895    0.1700
          0.5950    0.1800
          0.5997    0.1900
          0.6036    0.2000
```

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Thị Phương Hà, *Lý thuyết Điều khiển tự động*, NXB Đại học Quốc gia TP.HCM, 2003
2. Lương văn Lăng, *Cơ sở tự động*, NXB Đại học Quốc gia TP.HCM, 2002
3. Nguyễn Doãn Phước, *Lý thuyết điều khiển tuyến tính*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2002.
4. Nguyễn Ngọc Cẩn, *Kỹ thuật Điều khiển tự động*, NXB Đại học Quốc gia TP.HCM, 2001
5. Nguyễn Ngọc Phương, *Điều khiển tự động tập 1,* ĐH Sư Phạm Kỹ Thuật TP.HCM, 2000.
6. Trần Sum, *Tự động điều khiển*, NXB GTVT, 1999
7. Katsuhiko Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall , 4th edition, 2002
8. Holger Lutz & Wolfgang Went, *Taschenbuch der Regelungstechnik*, Verlag Harri Deutsch, 1998
9. R.C.Dorf and R.H.Bishop , *Modern Control System*, 9th edition , Addison Wesley, 2000
10. The Mathworks Inc. , *Control system toolbox 6.2 User's Guide*